Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

FAKULTÄT
FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

WISE 2018/19 | GRAPHENTHEORIE II

ÜBUNGSBLATT 3

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungen am **8. November** statt.

Für einen Graphen G sei $\alpha(G)$ die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge in G.

AUFGABE 1. Zeige, dass die Ecken eines Graphen G durch höchstens $\alpha(G)$ disjunkte Teilgraphen überdeckbar sind, die jeweils isomorph sind zu einem Kreis, einem K^2 oder K^1.

AUFGABE 2. Die Rundflüsse auf einem Graphen mit Werten in $\mathbb{Z}_2$ bilden in natürlicher Weise nicht nur eine Gruppe, sondern einen $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum. Zu welchem Raum aus den bisherigen Vorlesungen ist er isomorph? Benenne einen Isomorphismus explizit.

AUFGABE 3. Es sei H eine abelsche Gruppe, $G = (V, E)$ ein Graph, T ein Spannbaum und f eine (F1) erfüllende Abbildung von der Menge der Orientierungen der Kanten in $E \setminus E(T)$ nach H. Zeige, dass f eindeutig zu einem Rundfluss auf G mit Werten in H fortsetzbar ist.

AUFGABE 4. (Fortsetzung der vorigen Übung)

Es sei $\mathcal{V}_H(G)$ die Gruppe aller Abbildungen $V \to H$ und $\mathcal{E}_H(G)$ die Gruppe aller (F1) erfüllenden Abbildungen $\vec{E} \to H$, jeweils mit punktweiser Addition. Jedes $\varphi \in \mathcal{V}_H$ definiert ein $\psi \in \mathcal{E}_H$ durch $\psi(e, x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$.

(i) Zeige, dass diese ψ eine Untergruppe $\mathcal{B}_H = \mathcal{B}_H(G)$ von $\mathcal{E}_H$ mit $\mathcal{B}_H = \{\psi \in \mathcal{E}_H | \psi(\vec{C}) = 0$ für jeden orientierten Kreis $C \subseteq G\}$ bilden, wobei $\psi(\vec{C}) := \sum_{\vec{e} \in \vec{C}} \psi(\vec{e})$.

(ii) Zeige, dass jede (F1) erfüllende Abbildung $\vec{E}(T) \to H$ eindeutig zu einer Abbildung in $\mathcal{B}_H$ fortsetzbar ist.

AUFGABE 5.$^{+}$ (Fortsetzung der vorigen Übung)

Es sei $\mathcal{C}_H$ die Gruppe der Rundflüsse auf G mit Werten in H.

(i) Zeige, dass $\mathcal{E}_H/\mathcal{B}_H$ isomorph ist zu $\mathcal{C}_H$

(ii) Zeige, dass $\mathcal{E}_H/\mathcal{C}_H$ isomorph ist zu $\mathcal{B}_H$