WISE 2018/19 | GRAPHENTHEORIE II

ÜBUNGSBLATT 9

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungen am **20. Dezember** statt.

AUFGABE 1. Ein Satz von König besagt, dass in einem bipartiten Graphen die maximale Größe einer Paarung gleich der minimalen Größe einer Eckenüberdeckung ist. Beweise elementar mittels dieses Satzes, dass Komplemente bipartiter Graphen perfekt sind.

AUFGABE 2. Gebe mithilfe der Resultate aus der Vorlesung einen kurzen Beweis des folgenden Satzes von König, der zu dem obigen dual ist: In jedem bipartiten Graphen ohne isolierte Ecken ist die kleinste Anzahl von Kanten, die alle Ecken trifft gleich der größten Zahl von unabhängigen Ecken.

Ein Graph heißt *Vergleichbarkeitsgraph*, wenn eine Halbordnung auf $V(G)$ existiert, in der genau die in G benachbarten Elemente vergleichbar sind.

AUFGABE 3. Zeige, dass jeder Vergleichbarkeitsgraph perfekt ist.

Ein Graph G heißt *Intervallgraph*, wenn es eine Menge $\{I_v; v \in V\}$ reeller Intervalle gibt, so dass genau dann $I_v \cap I_w \neq \emptyset$ gilt, wenn $uv \in E$ ist.

AUFGABE 4.

(i) Zeige, dass jeder Intervallgraph chordal ist.

(ii) Zeige, dass das Komplement eines Intervallgraphen stets ein Vergleichbarkeitsgraph ist.

AUFGABE 5.$^{+}$ Sei G ein perfekter Graph. Ersetze ähnlich wie im Beweis von Satz 4.5.4 jede Ecke x von G durch einen perfekten (nicht notwendigerweise vollständigen) Graphen G_x (d.h. die Eckenmenge des entstehenden Graphen G' ist die disjunkte Vereinigung jener der G_x und die Kantenmenge setzt sich zusammen aus den Kanten aller G_x und Kanten zwischen allen Ecken von G_x und allen Ecken von G_y für alle $xy \in E(G)$). Zeige, dass der so konstruierte Graph G' wieder perfekt ist.