Matroidentheorie (Master)

Wintersemester 2016/2017

Inhaltsverzeichnis

1 Axiome und Beispiele

1.1 Unabhängige Mengen

Implementierung 1.1.1. Ein Matroid ist ein Paar $(E, \mathcal{I})$, wobei E eine endliche Menge ist und $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$, sodass

I1: $\varnothing \in \mathcal{I}$

I2: $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$

I3: Für $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$ gibt es $e \in I_2 - I_1$, sodass $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

E heißt Grundmenge und Elemente von $\mathcal{I}$ heißen unabhängig.

Beispiel 1.1.2.

a. Sei $\underline{v} = (v_e | e \in E)$ eine endliche Familie von Vektoren in einem Vektorraum V über einen Körper k.
Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | (v_e | e \in I) \text{ ist linear unabhängig}\}$. Dann ist $M(\underline{v}) := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Solche Matroide nennen sich darstellbar über k.

b. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Weiter sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | (V, I) \text{ ist ein Wald}\}$. Dann ist $M(G) = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Solche Matroide nennen sich graphisch.

c. Sei E eine endliche Menge und $m \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E || I| \leq m\}$. Dann ist $U_{m,E} := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Solche Matroide nennen sich uniform. Wir definieren $U_{m,n}$ als $U_{m,\{1,\ldots,n\}}$.

Lemma 1.1.3. Seien I_1, I_2 unabhängige Mengen und $x \in I_1 - I_2$, sodass $I_2 \cup x$ unabhängig ist. Dann gibt es $y \in I_2 - I_1$, sodass $(I_1 - x) \cup y$ unabhängig ist.

Beweis. Sei I eine maximale unabhängige Teilmenge von $I_1 \cup I_2$ mit $I_2 \subseteq I$. Wegen **I2** gilt $x \notin I$. Aber $|I| \geq |I_1| > |I_1 - x|$, also gibt es wegen **I3** ein $y \in I - (I_1 - x) = I_2 - I_1$ mit $(I_1 - x) \cup y$ unabhängig. □

1.2 Basen

Definition 1.2.1. Eine Basis eines Matroiden M ist eine maximale unabhängige Teilmenge der Grundmenge. Die Menge aller Basen nennen wir $\mathcal{B}(M)$.

Bemerkung 1.2.2. Alle Basen sind gleich groß.

Satz 1.2.3. Sei E eine endliche Menge und sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$. $\mathcal{B}$ ist genau dann die Menge aller Basen eines Matroiden auf E, wenn

B1 $\mathcal{B} \neq \varnothing$

B2 Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 - B_2$ gibt es $y \in B_2 - B_1$, sodass $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Dieser Matroid ist dann $(E, \{I \subseteq E | (\exists B \in \mathcal{B}) I \subseteq B\})$.

Beweis. $\Rightarrow$ **B1** folgt aus **I1**. Für **B2** seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ und sei $x \in B_1 - B_2$. $B_2 \cup x$ ist abhängig. Wegen Lemma 1.1.3 gibt es $y \in B_2 - B_1$ mit $(B_1 - x) \cup y$ unabhängig. Diese Menge ist sogar eine Basis weil sie die richtige Größe hat.
$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{I} = \{I \subseteq E | (\exists B \subseteq \mathcal{B}) I \subseteq B\}$. Wir beweisen zunächst, dass $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist. **I1** folgt aus **B1** und **I2** aus der Definition von $\mathcal{I}$.
Behauptung: Alle Elemente von $\mathcal{B}$ sind gleich groß.
Beweis. Angenommen nicht. Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $|B_1| > |B_2|$ und $|B_1 - B_2|$ minimal. Sei $x \in B_1 - B_2$. Sei $y \in B_2 - B_1$, sodass $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. Dann $|(B_1 - x) \cup y| = |B_1| > |B_2|$, aber $|((B_1 - x) \cup y) - B_2| = |(B_1 - B_2) - x| = |B_1 - B_2| - 1$ ↯ □
Für **I3** seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Sei $B_1 \in \mathcal{B}$ mit $I_1 \subseteq B_1$. Wir können annehmen, dass $(I_2 - I_1) \cap B_1 = \varnothing$, sonst sind wir fertig. Sei $B_2 \in \mathcal{B}$ mit $I_2 \subseteq B_2$, sodass $|B_2 - (I_2 \cup B_1)|$ minimal ist.
Behauptung: $B_2 \subseteq I_2 \cup B_1$
Beweis. Angenommen nicht. Sei $x \in B_2 - (I_2 \cup B_1)$. Dann gibt es $y \in B_1 - B_2$ mit $(B_2 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. Aber dann gilt $I_2 \subseteq (B_2 - x) \cup y$ und $|(B_2 - x) \cup y - (I_2 \cup B_1)| = |B_2 - (I_2 \cup B_1)| - 1$ ↯ □
Dann $|B_1 - I_1| = |B_1| - |I_1| > |B_2| - |I_2| = |B_2 \cap B_1|$, also gibt es $x \in (B_1 - I_1) - (B_2 \cap B_1)$. Sei $y \in B_2 - B_1$ mit $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. Dann $y \in I_2$ und $I_1 \cup y \subseteq (B_1 - x) \cup y$, also $I_1 \cup y \in \mathcal{I}$. Deshalb ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E, \mathcal{I})$. □

1.3 Kreise

Definition 1.3.1. Sei M ein Matroid auf E. Ein Kreis von M ist eine minimale abhängige Menge.

Lemma 1.3.2. (Starke Elimination)
Seien C_1, C_2 Kreise und sei $z \in C_1 - C_2$ und $x \in C_1 \cap C_2$. Dann gibt es einen Kreis C mit $z \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$.

Beweis. Sei I eine maximale unabhängige Teilmenge von $(C_1 \cup C_2) - x - z$, die $C_2 - x$ erweitert. Wäre nun $I \cup z$ unabhängig so gäbe es, wegen Lemma 1.1.3 ($I_1 := I \cup z, I_2 := C_1 - z$), ein $y \in (C_1 - z) - I$ mit $I \cup y$ unabhängig. Weil dieses nicht möglich ist, ist $I \cup z$ abhängig. Sei C eine minimale abhängige Teilmenge. Dann ist C ein Kreis mit $z \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$. □

Satz 1.3.3. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$. $\mathcal{C}$ ist genau dann die Menge aller Kreise eines Matroiden, wenn:

C1 $\varnothing \notin \mathcal{C}$

C2 Für $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ mit $C_1 \subseteq C_2$ gilt $C_1 = C_2$.

C3 Für $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}$ und $x \in C_1 \cap C_2$ gibt es $C \in \mathcal{C}$ mit $C \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$.

Dieser Matroid ist dann $(E, \{I \subseteq E | (\nexists C \in \mathcal{C}) C \subseteq I\})$.

Beweis. $\Rightarrow$ **C1** und **C2** folgen aus der Definition von Kreisen und **I1** und **C3** folgt aus Lemma 1.3.2.
$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | (\nexists C \in \mathcal{C}) C \subseteq I\}$. Die einzige Möglichkeit für M mit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ ist $(E, \mathcal{I})$. Wir müssen also beweisen, dass M ein Matroid ist. **I1** und **I2** folgen aus der Definition und **C1**.
Behauptung: I3
Beweis. Angenommen nicht. Seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$ und $(\nexists x \in I_2 - I_1) I_1 \cup x \in \mathcal{I}$, sodass $I_1 - I_2$ minimal ist. Sei $x \in I_1 - I_2$, dann gilt $(I_2 - y) \cup x \notin \mathcal{I}$. Sei $C_y \in \mathcal{C}$ mit $C_y \subseteq (I_2 - y) \cup x$. Sei $z \in C_y - I_1$. Wie vorher gibt es einen Kreis C_z mit $C_z \subseteq (I_1 - z) \cup x$. Dann $C_y \neq C_z$ und $x \in C_y \cap C_z$, also gibt es wegen **C3** $C \in \mathcal{C}$ mit $C \subseteq I_2$. □
Deshalb ist M ein Matroid und $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$. □

Lemma und Definition 1.3.4. Sei I eine unabhängige Menge eines Matroiden M auf E. Sei $e \in E$ mit $I \cup e$ abhängig. Dann gibt es einen eindeutigen Kreis $C_e^I \subseteq I \cup e$. Diesen Kreis nennen wir Fundamentalkreis von e bzgl. I. Weiterhin gilt

$$C_e^I = \{f \in I | (I \cup e) - f \in \mathcal{I}\} \cup e.$$

Beweis. Sei C_e^I irgendein Kreis mit $C_e^I \subseteq I \cup e$. Gäbe es einen zweiten solchen Kreis C, so gäbe es wegen **C3**, einen Kreis C' mit $C' \subseteq (C_e^I \cup C) - e \in I$. Deshalb ist C_e^I der einzige solche Kreis. Für $f \in C_e^I$ ist deshalb $(I - f) \cup e$ unabhängig. Für $f \in I - C_e^I$ gilt $C_e^I \subseteq (I - f) \cup e$ und deshalb ist $(I - f) \cup e$ abhängig. □

1.4 Rang

Definition 1.4.1. Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Der Rang von M ist die gemeinsame Größe aller Basen.
Sei $X \subseteq E$. Die Einschränkung von M auf X $M|X$, ist der Matroid $(X, \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(X))$. Wir schreiben auch $M \backslash Q$ für $M|(E - Q)$. Der Rang $r_M(X)$ ist $r(M|X)$. Die Basen von $M|X$ nennen wir auch Basen von X.

Bemerkung 1.4.2. $\mathcal{C}(M|X) = \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{P}(X)$

Satz 1.4.3. Sei E eine endliche Menge und sei

$$r : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

r ist genau dann die Rangfunktion r_M eines Matroiden M wenn:

R1 Für $X \subseteq E$ gilt $0 \leq r(X) \leq |X|$.

R2 Für $X \subseteq Y \subseteq E$ gilt $r(X) \leq r(Y)$.

R3 Für $X, Y \subseteq E$ gilt $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$.

Dieser Matroid ist dann $(E, \{I \subseteq E | r(I) = |I|\})$.

Beweis. $\Rightarrow$ **R1** und **R2** gelten per Definition. Für **R3**, seien $X, Y \subseteq E$ und B_1 eine Basis von $X \cap Y$. Weiter sei B_2 eine Basis von X, die B_1 enthält und sei B_3 eine Basis von $X \cup Y$, die B_2 enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_2| + |B_3 \cap Y| \\ &= |B_1| + |B_2| \\ &= r(X \cap Y) + r(X \cup Y). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | r(I) = |I|\}$. Die einzige Möglichkeit für M mit $r_M = r$ ist $(E, \mathcal{I})$. Wir müssen also beweisen, dass M ein Matroid ist. **I1** folgt aus **R1**. Für **I2** sei $I \subseteq J \in \mathcal{I}$. Dann gilt

$$r(I) \geq r(\varnothing) + r(J) - r(J - I) \geq |J| - |J - I| = |I|,$$

woraus folgt $I \in \mathcal{I}$.
Für **I3** seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Dann

$$(I_1 \cup I_2) \geq r(I_2) = |I_2| > |I_1| = r(I_1).$$

Sei X eine maximale Teilmenge von $I_1 \cup I_2$ mit $r(X) = r(I_1)$. Sei $x \in I_2 - X$, dann gilt

$$\begin{aligned} r(I_1 \cup x) - r(I_1) &= r(I_1 \cup x) - r((I_1 \cup x) \cap X) \\ &\geq r((I_1 \cup x) \cup X) - r(X) \\ &= r(X \cup x) - r(X) \geq 1, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$r(I_1 \cup x) \geq r(I_1) + 1 = r(I_1 \cup x)$$

und deshalb $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$ gilt. Damit ist M ein Matroid und $r = r_M$. □

1.5 Abschlussoperationen

Definition 1.5.1. Sei M ein Matroid auf E und sei $X \subseteq E$. Der Abschluss Cl_M ist $\{x \in E | r(X \cup x) = r(X)\}$.

Lemma 1.5.2. $Cl_M : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ hat folgende 4 Eigenschaften:

CL1 Für $X \subseteq E$ gilt $X \subseteq Cl_M(X)$.

CL2 Für $X \subseteq Y \subseteq E$ gilt $Cl_M(X) \subseteq Cl_M(Y)$.

CL3 Für $X \subseteq E$ gilt $Cl_M(Cl_M(X)) = Cl_M(X)$.

CL4 Für $X \subseteq E$, $x \in E$ und $y \in Cl_M(X \cup x) - Cl_M(X)$ gilt $x \in Cl_M(X \cup y)$.

Beweis. Übung □

Satz 1.5.3. Sei E eine endliche Menge und sei $Cl : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Dann ist Cl genau dann der Abschlussoperator eines Matroiden, wenn es **CL1** bis **CL4** erfüllt. Dieser Matroid ist dann $(E, \{I \subseteq E | (\forall x \in I) x \notin Cl(I - x)\})$.

Beweis. $\Rightarrow$ ✓
$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | (\forall x \in I) x \notin Cl(I - x)\}$. Die einzige Möglichkeit für M mit $Cl_M = Cl$ ist $M = (E, \mathcal{I})$. Wir beweisen zunächst, dass M ein Matroid ist.
Behauptung: Für $I \in \mathcal{I}$ und $x \notin Cl(I)$ gilt $I \cup x \in \mathcal{I}$.
Beweis. Sei $y \in I \cup x$. Für $y = x$ gilt $y \notin Cl((I \cup x) - y)$ per Annahme. Für $y \in Cl(I \cup x - y)$ gilt $y \in Cl(I \cup x - y) - Cl(I - y)$ und somit mit **CL4** $x \in Cl(I - y \cup y) = Cl(I)$. Da $x \notin Cl(I)$ gilt also $y \notin Cl(I \cup x - y)$. □
Sei nun $\mathcal{B}$ die Menge aller maximalen Elemente von $\mathcal{I}$. Wegen der Behauptung gilt $Cl(\mathcal{B}) = E$ für alle $B \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ erfüllt **B1** denn $\emptyset \in \mathcal{I}$.
Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 - B_2$. Falls $B_2 \subseteq Cl(B_1 - x)$, so gilt $x \in E = Cl(B_2) \subseteq Cl(Cl(B_1 - x)) = Cl(B_1 - x)$, was nicht möglich ist. Also ist $B_2 \nsubseteq Cl(B_1 - x)$. Sei nun $y \in B_2 - Cl(B_1 - x)$. Dann gilt $B_1 - x \cup y \in \mathcal{I}$. Aus $y \in Cl(B_1) - Cl(B_1 - x)$ folgt $x \in Cl(B_1 - x \cup y)$ und deshalb gilt $E = Cl(B_1) \subseteq Cl(Cl(B_1 - y \cup x)) = Cl(B_1 - x \cup y)$. Somit gilt $B_1 - x \cup y \in \mathcal{B}$. Deshalb erfüllt $\mathcal{B}$ **B2**. Wegen Lemma 1.2.3 ist $M = (E, \mathcal{I}) = (E, \{I \subseteq E | (\forall x \in I) x \notin Cl(I - x)\})$ ein Matroid.
Für $X \subseteq E$ und $x \in E - X$ sei B eine Basis von X. Dann gilt $x \in Cl(X) \Leftrightarrow x \in Cl(B) \Leftrightarrow B \cup x \notin \mathcal{I} \Leftrightarrow r_M(X \cup x) = |B| = r_M(X) \Leftrightarrow x \in Cl_M(X)$. Daraus folgt $Cl_M = Cl$. □

Lemma 1.5.4. Für $X \subseteq E$ gilt $r(Cl(X)) = r(X)$.

Beweis. Sei B eine Basis von X. Dann gilt $Cl(X) \subseteq Cl(Cl(B)) \subseteq (B)$ und deshalb ist B eine Basis von $Cl(X)$. Somit gilt $r(Cl(X)) = |B| = r(X)$. □

Definition 1.5.5. Sei M ein Matroid auf E. Eine Teilmenge $X \subseteq E$ heißt abgeschlossen, wenn $Cl(X) = X$ und spannend wenn $Cl(X) = E$.
Eine Hyperebene ist eine abgeschlossene Menge X mit $r_M(X) = r(M) - 1$.

Lemma 1.5.6. Sei M ein Matroid auf E und $X \subseteq E$. Dann ist

a.) X genau dann spannend, wenn $r_M(X) = r(M)$.

b.) X genau dann eine Basis, wenn es eine minimale spannende Menge ist.

c.) X genau dann eine Hyperebene, wenn es eine maximale nicht spannende Menge ist.

Beweis. Sei B eine Basis von X.

a.) X ist spannend $\Leftrightarrow Cl(X) = E \Leftrightarrow Cl(B) = E \Leftrightarrow B$ eine Basis von $M \Leftrightarrow |B| = r(M)$ $\Leftrightarrow r_M(X) = r(M)$

b.) Basen sind wegen a.) minimale spannende Mengen. Falls X eine minimale spannende Menge ist, so gilt $X = B$ und deshalb ist X eine Basis.

c.) Sei X eine Hyperebene. Für $y \notin X$ gilt $y \notin Cl_M(B)$, also ist $B \cup y$ unabhängig. Deshalb ist $B \cup y$ eine Basis von $X \cup y$ und $r(X \cup y) = r(X) + 1 = r(M)$. Also ist $X \cup y$ spannend. Sei nun X eine maximale nicht-spannende Menge, dann gilt $r_M(X) = r(M) - 1$ und $r_M(Cl_M(X)) = r_M(X) < r(M)$. Somit gilt $X = Cl(X)$.

□

Lemma 1.5.7. Sei $X \subseteq E$ und $x \in E - X$. Dann gilt $x \in Cl_M(X)$ genau dann wenn es einen Kreis C gibt mit $x \in C \subseteq X \cup x$.

Beweis. $\Rightarrow$ Sei B eine Basis von X, dann gilt $x \in C_x^B \subseteq X \cup x$.
$\Leftarrow$ $x \in Cl_M(C - x) \subseteq Cl_M(X)$ □

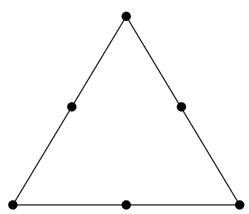
1.6 Geometrische Darstellungen

Definition 1.6.1. Sei $(v_i | i \in E)$ eine Familie von Vektoren in einem Raum V über k. Eine affine Abhängigkeit der Familie ist eine Familie von Koeffizienten $(\lambda_i | i \in I)$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$ und $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$.
Die Familie ist affin abhängig, falls es eine nicht-triviale affine Abhängigkeit gibt.

Lemma und Definition 1.6.2. Sei $(v_i | i \in E)$ eine Familie von Vektoren. Sei $\mathcal{I} := \{I \subseteq E | (v_i | i \in I) \text{ affin unabhängig}\}$. Dann ist $M_{aff}(\underline{v}) := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid der affine Matroid für $\underline{v}$.

Beweis. $M_{aff}(\underline{v}) = M(((v_i, 1) \in V \times k | i \in E))$ □

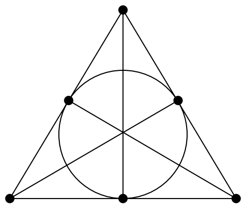
Beispiel 1.6.3. Wir betrachten folgende Familie von Punkten in $\mathbb{R}^2$.



Eine Teilfamilie ist genau dann abhängig, wenn sie aus mindestens 4 Punkten besteht oder 3 kolineare Punkte enthält.

Bemerkung 1.6.4. Eine Teilfamilie von $\mathbb{R}^3$ ist genau dann abhängig, wenn sie einen Punkt zweimal, 3 kolineare Punkte, 4 koplanare Punkte oder mindestens 5 Punkte enthält. Auf diese Weise können wir auch beliebige Matroide Rang ≤ 4 darstellen. Eine Menge ist dann abhängig wenn sie einen Punkt zweimal, 3 Punkte aus derselben eingezeichneten Linie, 4 punkte aus derselben eingezeichneten Ebene oder mindestens 5 Punkte enthält.

Beispiel 1.6.5. Der Fano-Matroid



2 Dualität

2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Lemma 2.1.1. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen eines Matroiden. Dann erfüllt $\mathcal{B}$:

B2' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_2 - B_1$ gibt es $y \in B_1 - B_2$ mit $B_1 \cup x - y \in \mathcal{B}$.

Beweis. Sei $y \in C_x^{B_1} - B_2$, dann gilt $y \in B_1 - B_2$ und $B_1 \cup x - y \in \mathcal{B}$. □

Satz und Definition 2.1.2. Sei M ein Matroid auf E. Dann ist $\mathcal{B}^* := \{E - B | B \in \mathcal{B}(M)\}$ die Menge aller Basen eines Matroiden M^* auf E. Diesen nennen wir dualer Matroid zu M.

Beweis. **B1** ist klar. Für **B2** seien $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*$ und $x \in B_1^* - B_2^*$. Weiter seien $B_1 \in \mathcal{B}$ mit $B_1^* = E - B_1$ und $B_2 \in \mathcal{B}$ mit $B_2^* = E - B_2$. Dann ist $x \in B_2 - B_1$, also gibt es wegen **B2'** ein $y \in B_1 - B_2 = B_2^* - B_1^*$ mit $B_1 \cup x - y \in \mathcal{B}$ und deshalb gilt $B_1^* - x \cup y \in \mathcal{B}^*$. □

Bemerkung 2.1.3. $M = (M^*)^*$

Notation 2.1.4. Basen von M^* nennen wir Kobasen von M, die unabhängigen Mengen von M^* nennen wir kounabhängig und so weiter.
$\mathcal{I}^*(M) := \mathcal{I}(M^*)$, $\mathcal{C}^*(M) := \mathcal{C}(M^*)$ usw
Sei B eine Basis von M und $e \in B$. Weiter sei D der Fundamentalkreis von e bzgl. $E - B$ in M^*. Dann nennen wir D den Fundamentalkokreis D_e^B von e bzgl. B.

Lemma 2.1.5. Sei M ein Matriod auf E, B eine Basis von M und $X \subseteq E$. $B \cap X$ ist genau dann eine Basis von X, wenn es kein $x \in X - B$ und $y \in B - X$ gibt mit $B \cup x - y \in \mathcal{B}(M)$.

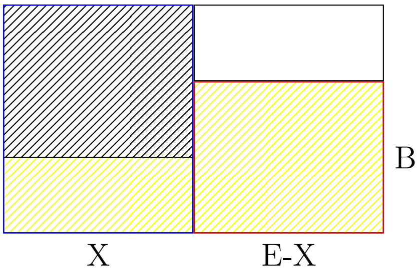
Beweis. $\Rightarrow$ Gäbe es solche x, y, so wäre $B \cup x$ eine größere Teilmenge von X.
$\Leftarrow$ Angenommen $B \cap X$ ist keine Basis von X. $B \cap X$ ist unabhängig, also ist sie nicht maximal. Sei $x \in X - B$, sodass $(B \cap X) \cup x$ unabhängig ist. Weiter sei B' eine Basis mit $(B \cap X) \cup x \subseteq B'$. Dann ist $x \in B' - B$ und es gibt, wegen **B2'**, ein $y \in B - B' \subseteq B - X$ mit $B \cup x - y \in \mathcal{B}(M)$. □

Korollar 2.1.6. Sei M ein Matroid auf E, $B \in \mathcal{B}(M)$ und $X \subseteq E$. $B \cap X$ ist genau dann eine Basis von X, wenn $(E - B) \cap (E - X)$ eine Basis von $E - X$ ist.

Korollar 2.1.7. Sei M ein Matroid auf E und $X \subseteq E$. Dann gilt

$$r_{M^*}(X) = |X| - r(M) + r_M(E - X).$$

Beweis. $r_{M^*}(X) = |X| - r(M) + r_M(E - X)$



□

Satz 2.1.8. Sei $E = P \dot{\cup} Q \dot{\cup} \{e\}$ eine Partitionierung von E. Dann gilt

$$e \in Cl_{M^*}(Q) \Leftrightarrow e \notin Cl_M(P).$$

Beweis. Sei B eine Basis von P, B' eine Basis von $P \cup e$, die B erweitert und B'' eine Basis von M die B' erweitert. Dann ist $Q - B''$ eine Kobasis von Q, $(Q \cup e) - B''$ eine Kobasis von $Q \cup e$ und $E - B''$ eine Kobasis von M. Also gilt

$$e \in Cl_M(P) \Leftrightarrow e \notin B'' \Leftrightarrow e \in E - B'' \Leftrightarrow e \notin Cl_{M^*}(Q).$$

□

Korollar 2.1.9. Sei M ein Matroid auf E und $X \subseteq E$. Dann gilt

$$Cl_{M^*}(X) = X \cup \{e \in E | e \notin Cl_M(E - X - e)\}.$$

Satzschema 2.1.10. Sei M ein Matroid auf E und $X \subseteq E$. Dann ist X ein/eine __________ von M, genau dann wenn $E - X$ ein/eine __________ in M^* ist.

a.) Basis / Basis

b.) spannende Menge / unabhängige Menge

c.) Hyperebene / Kreis

d.) Vereinigung von Kreisen / abgeschlossene Menge

Beweis. a.) per Definition

b.) folgt aus a.), weil X genau dann spannend ist, wenn sie eine Basis enthält.

c.) folgt aus b.), weil Hyperebenen maximale nicht-spannende Mengen sind.

d.) X ist eine Vereinigung von Kreisen $\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists C \in \mathcal{C}(M)) x \in C \subseteq X$
$\overset{1.5.7}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X) x \in Cl_M(X - x) \overset{2.1.8}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X) x \notin Cl_{M^*}(E - X)$
$\Leftrightarrow E - X$ ist eine abgeschlossene Menge von M^*.

□

Definition 2.1.11. Eine Teilmenge X der Grundmenge E eines Matroiden M heißt Gekritzel, wenn sie eine Vereinigung von Kreisen ist.

Korollar 2.1.12. X ist genau dann ein Gekritzel, wenn sie keinen Kokreis von M in genau einem Element trifft.

Satz 2.1.13. Seien H_1, H_2 Hyperebenen eines Matroiden M auf E und $e \in E - (H_1 \cup H_2)$. Dann gibt es eine Hyperebene H mit $(H_1 \cap H_2) \cup e \subseteq H$.

Beweis. Dual zu **C3**. □

Lemma 2.1.14. Sei $C \in \mathcal{C}(M)$ und $D \in \mathcal{C}^*(M)$. Dann gilt $|C \cap D| \neq 1$.

Beweis. C ist ein Gekritzel, also folgt dies aus 2.1.12. □

Korollar 2.1.15. Die Kokreise von M sind die minimalen nicht-leeren Teilmengen von E die keinen Kreis in genau einem Element treffen.

Lemma 2.1.16. Sei $C \in \mathcal{C}(M)$ und seien $e, f \in C$. Dann gibt es ein $D \in \mathcal{C}^*(M)$ mit $C \cap D = \{e, f\}$.

Beweis. Sei B eine Basis von M, die $C - e$ enthält und setze $D := D_f^B$. Dann gilt $f \in C \cap D \subseteq \{e, f\}$, also $C \cap D = \{e, f\}$ wegen Lemma 2.11.14. □

Lemma 2.1.17. Sei $I \in \mathcal{I}(M)$ und $J \in \mathcal{I}^*(M)$ mit $I \cap J = \varnothing$. Dann gibt es eine Basis B von M mit $I \subseteq B$ und $B \cap J = \varnothing$.

Beweis. Sei B eine Basis von $E - J$, die I enthält. Dann gilt

$$E \subseteq Cl_M(E - J) = Cl_M(Cl_M(B)) = Cl_M(B),$$

also ist B auch eine Basis von M. □

Lemma 2.1.18. Sei B eine Basis von M auf E. Weiter seien $e \in E - B$ und $f \in B$. Dann gilt $f \in C_e^B \Leftrightarrow e \in D_f^B$.

Beweis. $f \in C_e^B \Leftrightarrow C_e^B \cap D_f^B = \{e, f\} \Leftrightarrow e \in D_f^B$. □

2.2 Duale von darstellbaren Matroiden

Satz und Definition 2.2.1. Sei E eine endliche Menge und k ein Körper. Weiter sei V ein Unterraum von k^E. Für $v \in k^E$ ist der Träger $\underline{v}$ von v die Menge $\{e \in E | v(e) \neq 0\}$. Die Träger Menge $\mathcal{T}(V)$ ist die Menge $\{\underline{v} | v \in V\}$.
Sei nun $\mathcal{C}(V)$ die Menge aller minimalen nicht-leeren Elementen von $\mathcal{T}(V)$, dann ist $\mathcal{C}(V)$ die Menge aller Kreise eines darstellbaren Matroids $M(V)$ über k.

Beweis. Wir betrachten die Familie $\{\chi_e + V \in k^E/V | e \in E\}$, wobei χ_e die charakteristische Funktion ist.
Behauptung: Sei $\lambda \in k^E$. Dann ist $\lambda \in V$ genau dann, wenn $\sum_{e \in E} \lambda(e)(\chi_e + V) = 0$ gilt.
Beweis. $\sum_{e \in E} \lambda(e)(\chi_e + V) = \sum_{e \in E} \lambda(e)\chi_e + V = \lambda + V$ □
Für $I \subseteq E$ folgt es, dass $(\chi_e + V | e \in I)$ genau dann linear abhängig ist, wenn I ein nicht-leeres Element von $\mathcal{T}(V)$ enthält. Deshalb gilt $M(V) = M((\chi_e + V | e \in E))$. □

Satz 2.2.2. Sei $M((v_e | e \in E))$ ein darstellbarer Matroid über k und weiter sei $V := \{\lambda \in k^E | \sum_{e \in E} \lambda(e) v_e = 0\}$. Dann gilt $M(V) = M((v_e | e \in E))$.

Beweis. $\lambda \in V \Leftrightarrow \sum_{e \in E} \lambda(e) v_e = 0$. Der Satz folgt wie in dem Beweis von Satz 2.2.1. □

Lemma 2.2.3. Sei C ein Kreis von $M(V)$. Seien $v, v' \in V$ mit $\underline{v} = \underline{v'} = C$. Dann gibt es $\lambda \in k - 0$ mit $\lambda v = v'$.

Beweis. Sei $e_0 \in C$ und sei $\lambda = \frac{v'(e_o)}{v(e_0)}$. Weiter sei $v'' = v' - \lambda v$. Dann ist $\underline{v''} \subsetneq C - e_0$, also $\underline{v''} = \emptyset$. Für $e \in C$ gilt $v'(e) - \lambda v(e) = 0$. Deshalb gilt $v' = \lambda v$. □

Definition 2.2.4. Sei $V \subseteq k^E$, mit E endlich und B eine Basis von $M(V)$. Weiter sei $e \in E - B$. Der <u>Fundamentalvektor</u> v_e^B von e bzgl. B ist der eindeutige $v \in V$ mit $\underline{v} = C_e^B$ und $v(e) = 1$.

Lemma 2.2.5. Sei $V \subseteq k^E$, mit E endlich und B eine Basis von $M(V)$. Dann ist $\{v_e^B | e \in E - B\}$ eine Basis von V.

Beweis. Angenommen diese Menge ist linear abhängig, dann gibt es $\lambda \in k^{E-B} - 0$ mit $\sum_{e \in E-B} \lambda(e) v_e^B = 0$. Für $e_0 \in E - B$ gilt $0 = \sum_{e \in E-B} \lambda(e) v_e^B(e_0) = \lambda(e_0)$. Das heißt $\lambda = 0$. ↯
Sei nun $v \in V$ und $v' = v - \sum_{e \in E-B} v(e) v_e^B$. Dann gilt für $e_0 \in E - B$, dass

$$v'(e_0) = v(e_0) - v(e_0) = 0.$$

Somit gilt $\underline{v'} \subseteq B$ und deshalb gilt $\underline{v'} = \emptyset$. Also gilt $v = \sum_{e \in E-B} v(e) v_e^B \in \langle v_e^B | e \in E \rangle$ und deshalb ist die Menge spannend. □

Korollar 2.2.6. $r(M(V)) = |E| - dim(V)$

Korollar 2.2.7. $M(V) = M\left(\begin{cases}\chi_e & e \in B\\ -v_e^B|_B & e \in E - B\end{cases}\right)$

Die entsprechende Matrix hat die Form $\left(\begin{matrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{matrix}\quad A\right)$.

Korollar 2.2.8. Sei $v \in V$, wobei V ein Unterraum von k^E, mit E endlich ist. Dann ist $\underline{v}$ ein Gekritzel von $M(V)$.

Beweis. Sei I eine Basis von $\underline{v}$ und B eine Basis von M, die I erweitert. Dann gilt $v = \sum_{e \in \underline{v} - B} v(ev_e^B)$, also

$$\underline{v} \subseteq \bigcup_{e \in \underline{v} - B} \underline{v_e^B} = \bigcup_{e \in \underline{v} - B} C_e^B = \bigcup_{e \in \underline{v} - B} C_e^I \subseteq \underline{v}.$$

□

Definition 2.2.9. Sei E eine endliche Menge und seien $v, w \in k^E$. Das Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ von v und w ist $\sum_{e \in E} v(e)w(e)$. Wir schreiben $v \perp w$ oder v orthogonal zu w, falls $\langle v, w\rangle = 0$. Für V ein Unterraum von k^E setzen wir $V^\perp := \{w \in k^E | v \perp w \text{ für alle } v \in V\}$.

Satz 2.2.10. Sei E eine endliche Menge und sei V ein Unterraum von k^E. Dann gilt $M(V^\perp) = M^*(V)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage $\mathcal{C}(M^*(V)) \subseteq \mathcal{T}(V^\perp) \subseteq \mathcal{C}_>(M^*(V))$ (wobei $\mathcal{C}_>$ die Menge aller Gekritzel ist), woraus der Satz folgt.
$\mathcal{T}(V^\perp) \subseteq \mathcal{C}_>(M^*(V))$: Sei $w \in V^\perp$. Für $C \in \mathcal{C}(M(V))$, sei $v \in V$ mit $\underline{v} = C$. Dann gilt

$$\sum_{e \in E} v(e)w(e) = 0,$$

und deshalb $|c \cap \underline{w}| = |\underline{v} \cap \underline{w}| \neq 1$. Aus Korollar 2.1.12 folgt nun, dass $\underline{w}$ ein Gekritzel von $M^*(V)$ ist.
$\mathcal{C}(M^*(V)) \subseteq \mathcal{T}(V^\perp)$: Sei D ein Kokreis von $M(V)$, $e_0 \in D$ und B eine Basis von M mit $B \cap (D - e_0) = \varnothing$. Dann gilt $e_0 \in B$. Setze

$$w : E \longrightarrow k; \quad e \longmapsto \begin{cases}1 & e = e_0\\ -v_e^B(e_0) & e \in E - B\\ 0 & e \in B - e_0\end{cases}.$$

Für jedes $e \in E - B$ gilt $w \perp v_e^B$ und deshalb wegen Lemma 2.2.5 gilt $w \in V^\perp$. Weiter gilt

$$\underline{w} = e_0 \cup \{e \in B | e_0 \in C_e^B\} = e_0 \cup \{e \in B | e \in D_{e_0}^B\} = D_{e_0}^B = D.$$

Also gilt $D \in \mathcal{T}(V^\perp)$. □

Definition und Korollar 2.2.11. Sei B eine Basis von $M(V)$ und sei $f \in B$. Der Fundamentalkovektor w_f^B von f bzgl. B ist der eindeutige $w \in V^\perp$ mit $\underline{w} = D_f^B$ und $w(f) = 1$.
Für $e \in E - B$ gilt $w_f^B(e) = -v_e^B(f)$.

Die entsprechende Matrix hat die Form $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -A^t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \end{array}\right)$.

2.3 Duale von graphischen Matroiden

Definition 2.3.1. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph und A, B zwei disjunkte Mengen von Ecken. Wir schreiben $E(A, B)$ für die Menge aller Kanten mit einer Endecke in A und der anderen Endecke in B. Für $X \subseteq V$ ist der entsprechende Schnitt $D(X)$ von G die Menge $E(X, V - X)$. Die Menge aller Schnitte bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$.

Bemerkung 2.3.2. Sei K eine Komponente von G und (A, B) eine Partition von $V(K)$. Dann ist $E(A, B)$ ein Schnitt von G. $(E(A, B) = D(A))$

Satz 2.3.3. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph, dann gilt

$$\mathcal{C}(M^*(G)) \subseteq \mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{C}_>(M^*(G)).$$

Beweis. $\mathcal{C}(M^*(G)) \subseteq \mathcal{D}(G)$: Sei D ein Kokreis von $M(G)$. Weiter sei $e_0 \in D$ und B eine Basis von $M(G)$ mit $B \cap (D - e_0) = \emptyset$. Dann gilt $e_0 \in B$. Sei T der Graph (V, B). Dann ist T eine Vereinigung von Spannbäumen der Komponente von G. Sei K die Komponente von T, die e_0 enthält. Weiter seien K_1, K_2 die zwei Komponenten von $K - e_0$. Für $e = xy \in E - B$ gilt dann, dass $e \in D = D_{e_0}^B$ ist genau dann, wenn $e_0 \in C_e^B$ gilt. Aber $e_0 \in C_e^B$ bedeutet, dass der eindeutige Weg von x nach y in T die Kante e_0 enthält. Somit gilt $e \in E(V(K_1), V(K_2))$. Deshalb gilt $D = E(V(K_1), V(K_2)) \in \mathcal{D}(G)$.
$\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{C}_>(M^*(G))$: Sei $D = D(X)$ ein Schnitt von G und $C \in \mathcal{C}(M)$. Angenommen es gilt $|C \cap D| = 1$. Sei $C \cap D = \{xy\}$, wobei $x \in X$ und $y \notin X$. Dann ist $C - xy$ die Kantenmenge eines Weges von x nach y. Deshalb enthält sie eine Kante von D. $\lightning$
Wir haben bewiesen, dass es keinen Kreis C gibt mit $|C \cap D| = 1$ und somit ist D ein Kogekritzel. $\square$

Definition und Korollar 2.3.4. $\mathcal{C}(M^*(G))$ ist die Menge aller minimalen nicht-leeren Schnitte. Solche Schnitte nennen wir Minimalschnitte von G.

Lemma 2.3.5. Sei G ein zusammenhängender endlicher Graph. Ein Schnitt $D(X)$ ist genau dann Minimalschnitt, wenn $G[X]$ und $G[V - X]$ nicht-leer und zusammenhgend sind.

Beweis. $\Rightarrow$ Angenommen $G[X]$ ist nicht zusammenhängend. Seien K, K' verschiedene Komponenten von $G[X]$. Weiter seien $x \in V(K)$, $x' \in V(K')$ und P ein Weg von x nach x' in G. Somit enthält P Kanten $e \in D(V(K))$ und $e' \in D(V(K'))$ mit $e \neq e'$ weil es keine Kante in $E(V(K), V(K'))$ gibt. Dann ist $e \in D(V(K)) \subseteq D(X) - e'$ und somit ist $D(X)$ kein Minimalschnitt. $\lightning$
Deshalb ist $G[X]$ zusammenhängend. Analog ist $G[V - X]$ zusammenhängend.
$\Leftarrow$ Angenommen es gibt ein Y mit $\emptyset \neq D(Y) \subsetneq D(X)$. Sei $xy \in D(Y)$ mit $x \in X$ und $y \in V - X$. oBdA gilt auch $x \in Y$ und $y \in V - Y$. Es gilt, weil $G[X]$ zusammenhängend ist, dass $X \subseteq Y$ ist und weil $G[V - X]$ zusammenhängend ist, dass $V - X \subseteq V - Y$ ist. Somit gilt $X = Y$, also $D(X) = D(Y)$. $\lightning$ □

Lemma 2.3.6. Die Matroide $M^*(K_5)$ und $M^*(K_{3,3})$ sind nicht graphisch.

Beweis. $M^*(K_{3,3})$: Übung
$M^*(K_5)$: Angenommen es gibt einen Graphen $G = (V, E)$ mit $M(G) = M^*(K_5)$. oBdA ist G zusammenhängend. Es gilt

$$r(M(G)) = |E(K_5)| - r(M(K_5)) = 10 - 4 = 6.$$

Deshalb gilt $|V| = 7$. Für $x \in V$ enthält $D(\{x\})$ einen Minimalschnitt C von G, der ein Kreis von $M(K_5)$ ist. Somit ist der Grad von x mindestens 3. Es folgt, dass

$$10 = |E| \geq \frac{3}{2}|V| = \frac{21}{2} > 10. \lightning$$

□

Lemma 2.3.7. (Euler)
Seien G und G^* Graphen, die duale Einbettungen in $\mathbb{R}^2$ haben. Dann gilt

$$|V(G)| + |V(G^*)| - |E(G)| = 2.$$

Satz 2.3.8. Sei G ein zusammenhängender in $\mathbb{R}^2$ eingebetteter Graph und sei G^* ein dual-eingebetteter Graph. Dann gilt $M(G^*) = M^*(G)$.

Beweis. **Behauptung:** Sei C ein Kreis von $M(G)$ und sei $\hat{C}$ der entsprechende topologische Kreis in $\mathbb{R}^2$. Dann ist C ein Kogekritzel von $M(G^*)$.
Beweis. Sei X die Menge der Ecken von G^*, die innerhalb von $\hat{(C)}$ liegen. Dann gilt $C = D(X) \in \mathcal{D}(G^*) \subseteq \mathcal{C}_>(M^*(G^*))$. □
Sei nun B eine Basis von $M^*(G^*)$. Wegen der Behauptung ist B in $M(G)$ unabhängig. Deshalb ist B auch eine Basis von $M(G)$, denn es gilt

$$r(M^*(G^*)) = |E| - r(M(G^*)) = |E| - (V(G^*) - 1) \overset{2.3.6}{=} |V(G)| - 1 = r(M(G)).$$

Somit gilt $\mathcal{B}(M(G^*)) \subseteq \mathcal{B}(M^*(G))$. Ein duales Argument ergibt, dass $\mathcal{B}(M^*(G)) \subseteq \mathcal{B}(M(G^*))$. Also gilt $\mathcal{B}(M(G^*)) = \mathcal{B}(M^*(G))$. □

3 Minoren

3.0 Einschränkung

Bemerkung 3.0.1. Sei M ein Matroid auf E. Weiter sei $X \subseteq E$ und $Y \subseteq X$. Dann gilt:

a.) $\mathcal{I}(M|X) = \mathcal{I}(M) \cap \mathcal{P}(X)$

b.) Basen von $M|X$ sind die Basen von X in M.

c.) $\mathcal{C}(M|X) = \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{P}(X)$

d.) $\mathcal{C}_{>}(M|X) = \mathcal{C}_{>}(M) \cap \mathcal{P}(X)$

e.) $r_{M|X}(Y) = r_M(Y)$

f.) $Cl_{M|X}(Y) = Cl_M(Y) \cap X$

g.) Y ist genau dann in $M|X$ spannend, wenn $X \subseteq Cl_M(Y)$.

Bemerkung 3.0.2. $M \backslash Q_1 \backslash Q_2 = M \backslash (Q_1 \cup Q_2)$

Bemerkung 3.0.3. Sei $(v_i | i \in E)$ eine endliche Familie von Vektoren. Dann ist $M(v_i | i \in E)|X = M(v_i | i \in X)$. Sei $V \subseteq k^E$ ein Unterraum, dann gilt $M(V)|X = M(V \cap k^X)$. Weiter sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann gilt $M(G)|X = M((V, X))$.

3.1 Kontraktion

Definition 3.1.1. Sei M ein Matroid auf einer Menge E und sei $X \subseteq E$. Dann ist die <u>Kontraktion</u> $M.X$ von M auf X der Matroid $(M^*|X)^*$. Für eine Menge P definieren wir M/P als $M.(E - P)$.

Lemma 3.1.2. $M/P_1/P_2 = M/(P_1 \cup P_2)$

Beweis.
$M/P_1/P_2 = (((M^* \backslash P_1)^*)^* \backslash P_2)^* = (M^* \backslash P_1 \backslash P_2)^* = (M^* \backslash (P_1 \cup P_2))^* = M/(P_1 \cup P_2)$ □

Lemma 3.1.3. Sei M ein Matroid auf E, $P \subseteq E$, B_P eine Basis von P in M und $X \subseteq E - P$. Dann gilt:

a.) $X \in \mathcal{B}(M/P) \Leftrightarrow X \cup B_P \in \mathcal{B}(M)$

b.) $X \in \mathcal{I}(M/P) \Leftrightarrow X \cup B_P \in \mathcal{I}(M)$

Beweis. a.) $\Leftarrow$ Sei $X \cup B_P$ eine Basis von M. B_P ist eine Basis von P in M und deshalb ist $E - P - B_P$ eine Basis von $E - P$ in M^*. Also ist $E - P - B_P = E - P - X$ eine Basis von $M^*|(E - P) = (M/(E - P))^*$.
$\Rightarrow$ Sei B eine Basis von M mit $B_P \subseteq B$ und $(E-P-X) \cap B = \varnothing$ (möglich wegen Lemma 2.1.16). Dann ist $(E - P) - B$ eine Basis von $E - P$ in M^* mit $E - P - X \subseteq E - P - B$. Deshalb gilt $E - P - X = E - P - B$ und somit folgt $B = B_P \cup X$.

b.) Folgt aus a.).

$\square$

Lemma 3.1.4. Sei C ein Kreis von M/P, dann gibt es einen Kreis C' von M mit $C \subseteq C' \subseteq C \cup P$.

Beweis. Sei B eine Basis von P in M, $e \in C$ und $I = B \cup C - e$. Dann ist I, wegen Lemma 3.1.3, unabhängig in M, aber $I \cup e$ ist abhängig. Sei $C' = C_e^I$. Für $f \in C - e$ gilt $f \in C'$, weil $I \cup e - f = B \cup C - f$ unabhängig in M ist. Also gilt $C \subseteq C' \subseteq C \cup P$. $\square$

Lemma 3.1.5. $\mathcal{C}_>(M/P) = \{G - P | G \in \mathcal{C}_>(M)\}$

Beweis. $\subseteq$ Sei G ein Gekritzel von M/P. Dann gilt $G = \bigcup_{i \in I} C_i$, mit $C_i \in \mathcal{C}_>(M/P)$. Für $i \in I$ sei C_i' ein Kreis mit $C_i \subseteq C_i' \subseteq C_i \cup P$. Definiere $G' = \bigcup_{i \in I} C_i'$. Dann ist G' ein Gekritzel von M mit $G' - P = G$.
$\supseteq$ Sei nun G ein Gekritzel von M und D ein Kokreis von M/P (d.h. ein Kreis von $M^* \backslash P$). Dann ist D auch ein Kokreis von M und deshalb gilt $(G - P) \cap D = |G \cap D| \neq 1$. Somit ist $G - P$ ein Gekritzel von M/P. $\square$

Korollar 3.1.6. Die Kreise von M/P sind die minimalen nicht-leeren Mengen der Form $C - P$ mit C ist ein Kreis von M.

Korollar 3.1.7. Sei M ein Matroid und seien P, Q disjunkte Mengen. Dann gilt $M/P\backslash Q = M\backslash Q/P$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_>(M/P\backslash Q) =& \{G - P | G \in \mathcal{C}_>(M) \text{ und } (G - P) \cap Q = \varnothing\} \\ =& \{G - P | G \in \mathcal{C}_>(M) \text{ und } G \cap Q = \varnothing\} \\ =& \mathcal{C}_>(M\backslash Q/P)\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 3.1.8. $r_{M/P}(X) = r_M(X \cup P) - r_M(P)$

Beweis. (erster Beweis)
Folgt aus Lemma 3.1.3 b.). $\square$

Beweis. (zweiter Beweis)

$$\begin{aligned} r_{M/P}(X) =& r_{(M^*\backslash P)^*}(X) = r_{M^*\backslash P}(E-P-X) - r(M^*P) + |X| \\ =& r_{M^*}(E-P-X) - r_{M^*}(E-P) + |X| \\ =& r_M(P\cup X) - r(M) + |E-P-X| - (r_M(P) - r(M) + |E-P|) + |X| \\ =& r_M(P\cup X) - r_M(P) \end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.9. $Cl_{M/P}(X) = Cl_M(X\cup P) - P$

Beweis. Für $x\in E-P-X$ gilt:

$$\begin{aligned} x\in Cl_{(M^*\backslash P)^*}(X) \Leftrightarrow & x\notin Cl_{M^*\backslash P}(E-P-X-x) \\ \Leftrightarrow & x\in Cl_{M^*}(E-P-X-x) \\ \Leftrightarrow & x\in Cl_M(P\cup X) \end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.10. Eine Menge $X\subseteq E-P$ ist genau dann in M/P spannend, wenn $X\cup P$ in M spannend ist.

Definition 3.1.11. Ein Minor eines Matroiden M ist ein Matroid der Form $M/P\backslash Q$, mit $P\cap Q=\varnothing$. Für einen Matroiden N ist ein N-Minor von M, ein Minor von M, der zu N isomorph ist.

Bemerkung 3.1.12. Minoren von Minoren sind Minoren. N^* ist ein Minor von M^* genau dann, wenn N ein Minor von M ist.

3.2 Minoren von darstellbaren Matroiden

Satz 3.2.1. Minoren von darstellbaren Motroiden sind darstellbar.

Beweis. Einschränkungen und Duale von darstellbaren Matroiden sind darstellbar. Es gilt also $M/P\backslash Q = (M^*\backslash P)^*\backslash Q$. □

Satz 3.2.2. Sei $(v_i|i\in E)$ eine endliche Familie von Vektoren in einem Vektorraum V und sei $P\subseteq E$. Weiter sei $W := \langle v_i|i\in P\rangle$, dann gilt $M(v_i|i\in E)/P = M(v_i+W\in V/W|i\in E-P)$.

Beweis. Sei B eine Basis von P, dann ist $\{v_i|i\in B\}$ eine Basis von W. Für $I\subseteq E-P$ müssen wir beweisen, dass $(v_i+W|i\in I)$ genau dann in V/W linear unabhängig ist, wenn

$(v_i | i \in B \cup I)$ linear unabhänigig ist.
$\Rightarrow$ Angenommen es gilt $\sum\limits_{i \in I \cup B} \lambda_i v_i = 0$, dann gilt $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i (v_i + W) = 0$. Deshalb gilt $\lambda_i = 0$ für $i \in I$. Es folgt, dass $\sum\limits_{i \in B} \lambda_i v_i = 0$ und weil B eine Basis ist, sind auch die $\lambda_i = 0$ für $i \in B$.
$\Leftarrow$ Angenommen $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i (v_i + W) = 0$, dann gilt $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i \in W$. Sei also $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum\limits_{i \in B} \mu_i v_i$. Dann gilt $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i + \sum\limits_{i \in B} (-\mu_i) v_i = 0$ und deshalb sind alle λ_i und μ_i gleich 0. $\square$

Satz 3.2.3. Sei E eine endliche Menge, $V \subseteq k^E$ ein Unterraum und $P \subseteq E$. Weiter sei $V/P := \{v|_{E-P} | v \in V\}$, dann gilt $M(V)/P = M(V/P)$.

Beweis. Übung $\square$

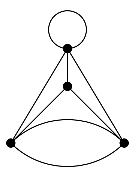
3.3 Minoren von graphischen Matroiden

Definition 3.3.1. Ein Multigraph G besteht aus einer Menge V von Ecken, einer Menge E von Kanten und einer Abbildung $E \longrightarrow [V]^2 \cup [V]^1$, die jeder Kante seine Endecken zuordnet. Wir schreiben manchmal (V, E) für G.

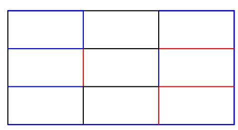
Bemerkung 3.3.2. Unsere Sätze über Graphen gelten auch für Multigraphen.

Definition 3.3.3. Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph und seien P, Q disjunkte Teilmengen von E. Weiter sei V_P die Menge aller Komponenten von (V, P). Dann ist $G/\backslash Q$ der Multigraph mit Eckenmenge V_P und Kantenmenge $E - P - Q$, wobei die Endecken von e in $G/P\backslash Q$ die Komponenten sind, die die Endecken von e in G enthalten. $G/P\backslash Q$ heißt Minor von G.

Beispiel.



ist ein Minor eines ausreichend großen Gitters



wobei wir die blauen Kanten kontrahieren und die roten löschen.

Bemerkung 3.3.4. Die Schnitte von G/P sind genau die Schnitte von G, die P nicht treffen.

Satz 3.3.5. Sei G ein endlicher Multigraph und seien P, Q disjunkte Teilmengen von $E(G)$. Dann gilt $M(G)/P\backslash Q = M(G/P\backslash Q)$.

Beweis. Wegen Bemerkung 3.0.3 können wir oBdA annehmen, dass $Q \neq \varnothing$ ist. Nach Bemerkung 3.3.4 sind nun die Minimalschnitte von G/P genau die Minimalschnitte von G, die P nicht treffen. Also gilt $\mathcal{C}^*(M(G/P)) = \mathcal{C}(M^*(G)\backslash P) = \mathcal{C}^*(M(G)/P)$. □

Korollar 3.3.6. Minoren von graphischen Matroiden sind graphisch.

Satz 3.3.7. (Kuratowski)
Sei G ein endlicher Multigraph. G ist genau dann planar, wenn G keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor hat.

Korollar 3.3.8. Sei G ein Multigraph. G ist genau dann planar, wenn $M^*(G)$ graphisch ist.

Beweis. $\Rightarrow$ Folgt aus Satz 2.3.8.
$\Leftarrow$ Falls G einen K_5-Minor hätte, so wäre $M^*(K_5)$ ein Minor von $M^*(G)$, also graphisch. Somit hat G wegen Lemma 2.3.6 keinen K_5-Minor. $K_{3,3}$ analog. Nach dem Satz von Kuratowski ist G dann planar. □