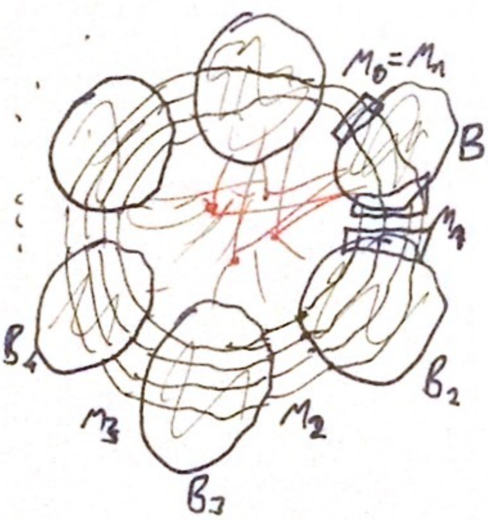
Kapitel 2: Halsketten und der Gittersatz

2.1: Halsketten

Definition 2.1.1: Eine Menge U von Ecken eines Graphen G heißt θ-zusammenhängend, wenn es zu je zwei Teilmengen $X, Y \subseteq U$ mit $|X| = |Y| \leq \theta$ eine Menge von $|X|$ disjunkten X-Y Wege in G gibt.

Bemerkung 2.1.2: G ist θ-zusammenhängend genau dann, wenn $V(G)$ in G θ-zusammenhängend ist.



Definition 2.1.3: Sei G ein Graph und sei $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$, wobei $\mathcal{B}$ eine Folge $(B_i : i \in \mathbb{Z}_n)$ von disjunkten Teilmengen von $V(G)$, $\mathcal{M}$ eine Folge $(M_i : i \in \mathbb{Z}_n)$ von disjunkten Teilmengen von $E(G)$, und Z eine Teilmenge von $V(G)$ ist.

Die Linkverbindungsfolge von N ist $\mathcal{X} = (X_i := B_i \cap V(M_{i-1}) : i \in \mathbb{Z}_n)$

und die <u>Rechtsverbindungsfolge</u> von N ist $\mathcal{Y} := (Y_i := B_i \cap V(M_i) : i \in \mathbb{Z}_n)$

N heißt (t,s,z,n)-Halskette, falls:

(N1) Die B_i sind voneinander und von Z disjunkt.

(N2) $G[B_i]$ ist nicht leer aber zusammenhängend für $i \in \mathbb{Z}_n$

(N3) $M_1 \dots M_{n-1}$ haben die Größe t und M_n hat Größe s.

(N4) Für $i \in \mathbb{Z}_n$ ist M_i eine Paarung von Y_i nach X_{i+1}.

(N5) Für $i \in \mathbb{Z}_n$ gibt es in B_i $\min(|X_i|, |Y_i|)$-viele disjunkte X_i-Y_i Wege.

(N6) $|Z| = z$ und jedes Element von Z hat Nachbarn in allen B_i.

Die B_i heißen <u>Perlen</u> von N, Z heißt die <u>Nabe</u> und n heißt die <u>Länge</u> von N. Eine $(\theta; n)$-Halskette ist eine (t,s,z,n)-Halskette mit $t+s+z = \theta$.

<u>Satz 2.1.4</u>: Sei $N \overset{(B,M,Z)}{=}$ eine $(\theta; n)$-Halskette in G und U eine Menge, die aus genau einem Element jedes B_i besteht. Dann ist U in G θ-zusammenhängend.

<u>Beweis</u>: Angenommen nicht. Sei N eine (t,s,z,n)-Halskette, mit $t+s+z = \theta$. Seien $X, Y \subseteq U$ mit $|X| = |Y| \leq \theta$, sodass es keine Menge von $|X|$-vielen disjunkten X-Y Wegen in G gibt. Nach dem Satz von Menger gibt es eine Menge S mit $|S| < |X|$, die X von Y in G trennt.

Sei $x \in X$, $y \in Y$, sodass die Perlen B_x ~~und~~ bzw. B_y, die x bzw. y enthalten, von S disjunkt sind. ~~Also~~ $B_x \neq B_y$, da alle Perlen zusammenhängend sind. Es gibt θ disjunkte B_x-B_y Wege (z durch die Nabe, t in einer Richtung um die Halskette und s in der anderen Richtung) und eins davon muss S vermeiden ↯ □

<u>Satz 2.1.5</u> (Der Halskettensatz; Geelen + Joeris, 2016):

Für $\theta, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass jeder Graph G, der eine θ-zusammenhängende Menge U der Größe m enthält, auch eine $(\theta; n)$-Halskette enthält, in der jede Perle U trifft.

<u>Beweis</u>: später

<u>Definition 2.1.6</u>: Sei $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$ eine (t, s, z, m)-Halskette.

Sei $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = m$. Dann ist

$$N \circ (a_1, a_2 \dots a_{n-1}) := \left(\left(\bigcup_{j=a_{i-1}+1}^{a_i} B_j : i \in \mathbb{Z}_n \right), (M_{a_i} : i \in \mathbb{Z}_n), Z \right)$$

eine (t, s, z, n)-Halskette, die wir <u>Kontraktion</u> von N zwischen $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ nennen.

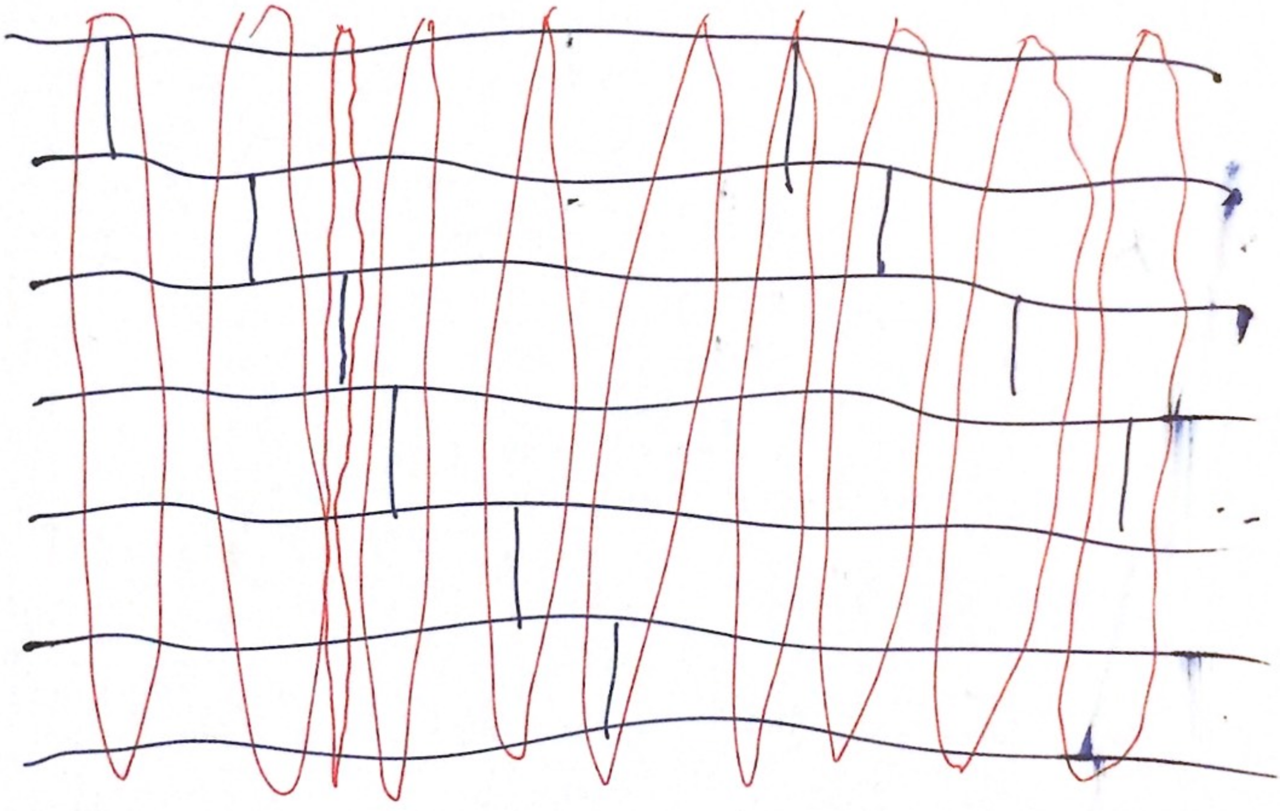
<u>Definition 2.1.7</u>: Sei $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$ eine (t, s, z, n)-Halskette.

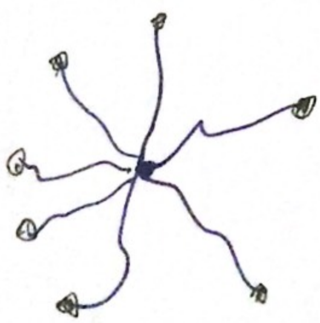
Die <u>Umkehrung</u> von N ist die (t, s, z, n)-Halskette

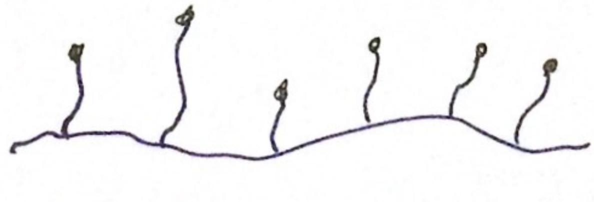
$$((B_{n+1-i} : i \in \mathbb{Z}_n), (M_{n-i} : i \in \mathbb{Z}_n), Z)$$

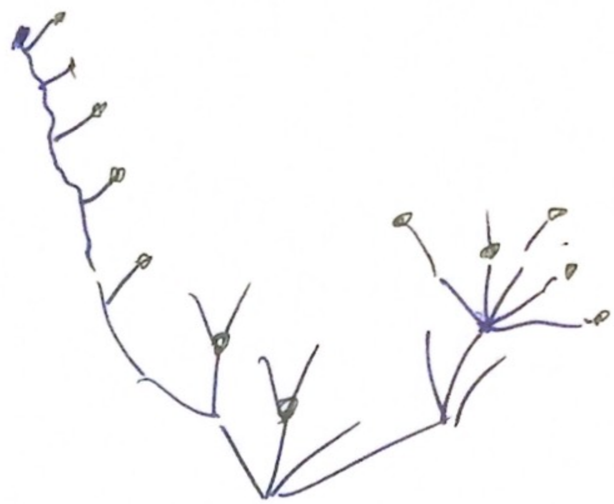
<u>Definition 2.1.8</u>: Eine Halskette N <u>trägt</u> eine Halskette N', falls jede Perle von N' eine Perle von N enthält. ~~Sie trägt eine~~ Eine Menge U ~~falls jede Perle~~ trägt eine Halskette N, falls jede Perle von N U trifft.

<u>Bemerkung</u>: Tragen ist eine transitive Relation









2.2: Der Induktionsanfang.

Lemma 2.2.1: Seien $l, n \in \mathbb{N}$. Sei G ein zusammenhängender Graph und sei $U \subseteq V(G)$ mit $|U| \geq \frac{n^l - 1}{n - 1}$. Sei $v \in V(G)$. Dann gibt es in G eine $(0,0,1,n+1)$-Halskette, die U trägt, oder eine $(1,0,0,l+1)$-Halskette (B,M,Z) mit $v \in B_{l+1}$, die U trägt.

Beweis: Induktion nach $|V(G)|$.

Induktionsanfang: $G = \emptyset$: Dann gilt $U = \emptyset$; nicht möglich.

Induktionsschritt: Falls $l = 0$; U ist nicht leer, also finden wir eine $(1,0,0,1)$-Halskette mit $v \in B_1$, die U trägt, indem wir $B_1 := V(G)$ setzen.

Für $l > 0$ gibt es 3 Fälle:

Fall 1: Es gibt eine Komponente K von $G-v$, die U enthält.

Sei v' ein Nachbar von v in K. Wir wenden die IH für l, n, K, U und v' an, und fügen v ggf. in der Perle B_{l+1} hinzu. ✓

Fall 2: Es gibt eine Komponente K von $G-v$ mit $\frac{n^{l-1}-1}{n-1} < |K \cap U| < |U|$

Sei v' ein Nachbar von v in K. Wir wenden die IH für $l-1, n, K, U \cap K$ und v' an, und fügen $G-K$ ggf. als letzte Perle B_{l+1} hinzu. ✓

Fall 3: Für jede Komponente K von $G-v$, die U trifft, gilt $|K \cap U| \leq \frac{n^{l-1}-1}{n-1}$.

Dann ist die Anzahl von solchen Komponenten ~~mindestens~~ mehr als

$$\left(\frac{n^l-1}{n-1} - 1\right) \Big/ \left(\frac{n^{l-1}-1}{n-1}\right) = \frac{n^l-n}{n^{l-1}-1} = n$$

also bilden $n+1$ von diese Komponenten die Perlen einer $(0,0,1,n+1)$-Halbkette mit Nabe $\{v\}$, die U trägt. ✓

$\square$

Korollar 2.2.2: Seien $l, n \in \mathbb{N}$. Sei G ein zusammenhängender Graph. Sei N eine $(0,0,0,m)$-Halbkette in G mit $\frac{n^l-1}{n-1} < m$. Dann gibt es in G eine $(0,0,1,n+1)$- oder $(1,0,0,l+1)$-Halbkette, die N trägt.

Beweis: Wir wenden Lemma 2.2.1 in dem Graphen an, wo wir alle Perlen von N kontrahiert haben.

Definition 2.2.3 Eine (t,s,z,n)-Halbkette heißt aneinandergereiht, falls $t > 0$.

Lemma 2.2.4: Es gibt eine Funktion $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, sodass für $\theta, l, n \in \mathbb{N}$ mit $l, n \geq 2$ es für jeden Graphen G, jede θ-zusammenhängende Menge U und jede von U getragene $(0;m)$-Halskette N mit $m \geq f(\theta, l, n)$ eine von N getragene $(0,0,\theta,n+1)$- oder $(1,0,0,l+1)$-Halskette gibt.

Beweis: Wir setzen $f(0,l,n) := n$ und $f(\theta,l,n) := \frac{f(\theta-1,l,n)^l - 1}{f(\theta-1,l,n)-1}$ für $\theta > 0$. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach θ. Der Induktionsanfang $\theta = 0$ ist klar.

Induktionsschritt: Nach Korollar 2.2.2 gibt es eine von N getragene $(1,0,0,l+1)$- oder $(0,0,1,f(\theta-1,l,n))$-Halskette. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten sei die Halskette $(B, M, \{v\})$. Wir wenden dann die IH für $\theta-1, l, n$, $G-v$ und $(B, M, \emptyset)$ an und fügen v ggf. am Ende in die Nabe hinzu. ✓ □

Notation 2.2.5: $a \gg a_1, a_2 \dots, a_k$ in einer Aussage bedeutet, dass es eine Funktion f gibt, sodass das Argument funktionieren würde, wenn wir an dieser Stelle $a \geq f(a_1, a_2 \dots a_k)$ schreiben würden.

Korollar 2.2.6: Sei G ein Graph und U eine θ-zusammenhängende Menge in G mit $|U| \gg \theta, l, n$. Dann gibt es in G eins von:

(i) eine von U getragene $(\theta, 0, \theta, n)$-Halskette

(ii) eine $(1, 0, 0, l)$-Halskette, in der jede Perle mindestens θ Elemente von U enthält.

Beweis: Aus jeder $(1, 0, 0, \theta l)$-Halskette können wir durch Kontraktion eine Halskette wie in (ii) bauen. Also reicht $|U| > f(\theta \cdot \theta l, n)$ mit f der Funktion aus Lemma 2.2.4. □

Satz 2.2.7 (Erdös-Szekeres): Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X eine linear geordnete Menge. Dann enthält jede Folge $(x_1, \dots, x_l)$ mit $l >> n$ von Elementen von X eine auf- oder absteigende Teilfolge der Länge n.

Lemma 2.2.8: Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei G ein zusammenhängender Graph. sei $U \subseteq V(G)$ mit $|U| >> n$. sei $\leq$ eine lineare Ordnung auf U. Dann enthält G eins von:

(i) eine $(0, 0, 1, n)$-Halskette, die von U getragen wird.

(ii) eine $(1, 0, 0, n)$-Halskette $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{Z})$, sodass es eine aufsteigende Folge $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ in U gibt, mit $u_i \in B_i$

Beweis: Nach Lemma 2.2.1 finden wir eine $(0, 0, 1, n)$- oder $(1, 0, 0, l)$-Halskette $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{Z})$ mit $l >> n$, die von U getragen wird. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten, sei $v_1 \dots v_l$ eine Folge in U mit $v_i \in B_i$. Nach dem Satz von Erdös und Szekeres gibt es ein auf- oder absteigende Teilfolge $u_1 \dots u_n$. Indem wir die Halskette ggf. umkehren, können wir annehmen, dass die Folge aufsteigend ist.

Also können wir eine passende Kontaktion von dieser Halbkette nehmen.

2.3: Lange Sprünge

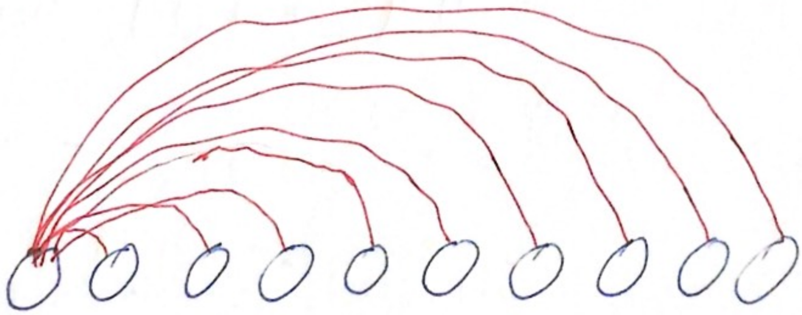
<u>Definition 2.3.1</u>: Sei $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$ eine Halbkette in G. Ein <u>N-Sprung</u> ist ein $\bigcup \mathcal{B} \cup Z$-Weg. Ein N-Sprung heißt (i,j)-Sprung falls die Endecken in B_i bzw. B_j liegen. Ein (i,j)-Sprung heißt <u>lang</u> falls $|i-j| > 1$ (modulo die Länge von N). N heißt <u>langsprunglos</u>, falls es keine lange N-Sprünge gibt.

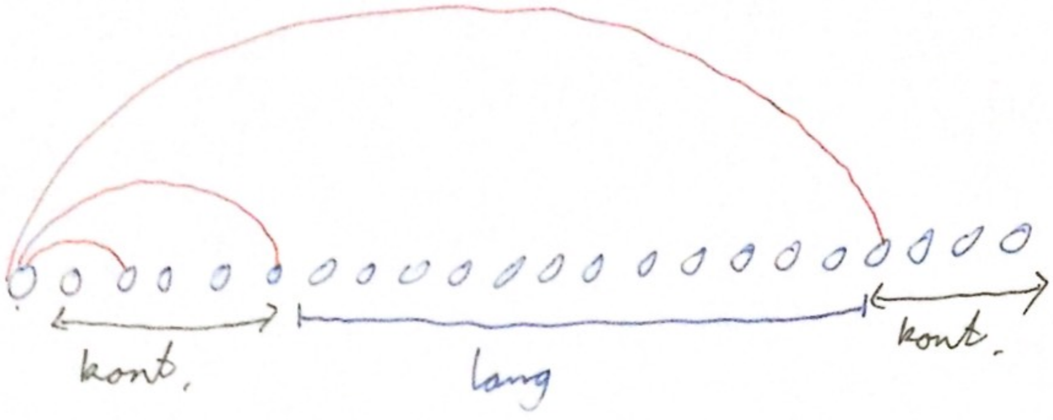
<u>Lemma 2.3.2</u>: Seien $t, s, z \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $m \gg n$. Dann hat jede (t,s,z,m)-Halbkette $N = (\mathcal{B}, \mathcal{M}, Z)$ in einem Graphen G oder seine Umkehrung eine Kontraktion N' der Länge n, sodass eins von:

(i) N' ist langsprunglos

(ii) Es gibt zu jedem $i \in \mathbb{Z}_n$ einen $(1, i)$-Sprung

---





<u>Beweis:</u> Wir nennen eine (t,s,z,n)-Halbkette k-gut, falls für $i \leq k$ es keinen (i,j)-Sprung gibt mit $j \notin \{i-1, i, i+1, n\}$

<u>Behauptung:</u> Seien $n', k \in \mathbb{N}$ und sei $m \gg_n n', k$. Dann hat jede (t,s,z,m)-Halbkette M in G eine Kontraktion M', ~~[illegible]~~ sodass eins von:

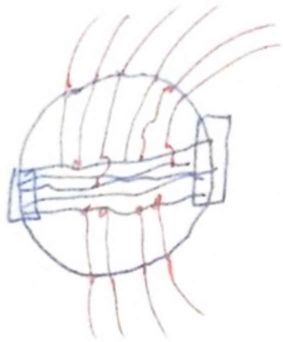
(i) M' hat Länge $\geq n'$ und ist k-gut

(ii) M' hat Länge $\geq n$ und es gibt zu jedem $i \in \mathbb{Z}_n$ einen $(1,i)$-Sprung für M'!

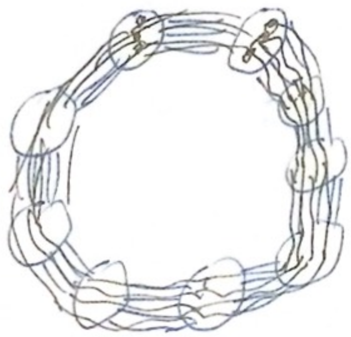
<u>Beweis:</u> Per Induktion nach k. Der Induktionsanfang $k=0$ ist klar.

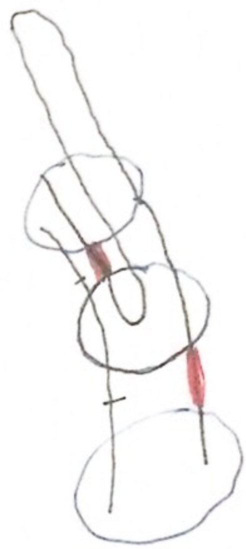
<u>Induktionsschritt:</u> Mit der IH finden wir O.B.d.A. eine $(k-1)$-gute ~~Halbkette~~ Kontraktion von M, M'' der Länge $\gg n, k, n'$. Sei $S = \{i \in \mathbb{Z}_n : k < i$ und es gibt einen (k,i)-Sprung für $M''\}$. Falls $|S| \geq n$, so finden wir eine Kontraktion ~~wie in~~ von M'' wie in (ii). Sonst finden wir ~~nacheinander~~ nacheinanderfolgende elemente i,j von S mit $j-i \geq n'$. Also finden wir eine Kontraktion von M'' wie in (i).

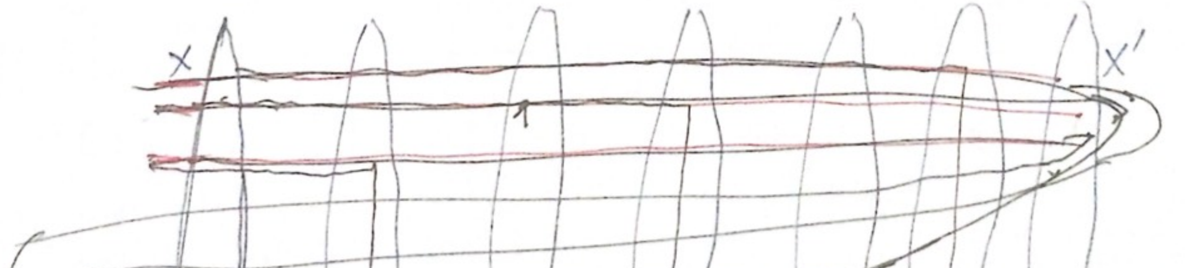
In der Behauptung setzen wir nun $n' = k = (n+1)^2$. O.B.d.A. ist die Länge von M' genau n'. Sei $S := \{i \in \mathbb{Z}_n : i < n'$ und es gibt einen (i,n')-Sprung für $M'\}$. Falls $|S| \geq n$ so finden wir eine Kontraktion der Umkehrung von M' wie in (ii). Sonst finden wir eine Kontraktion von M' wie in (i). □



2.4: Langsprunglose Halbketten.





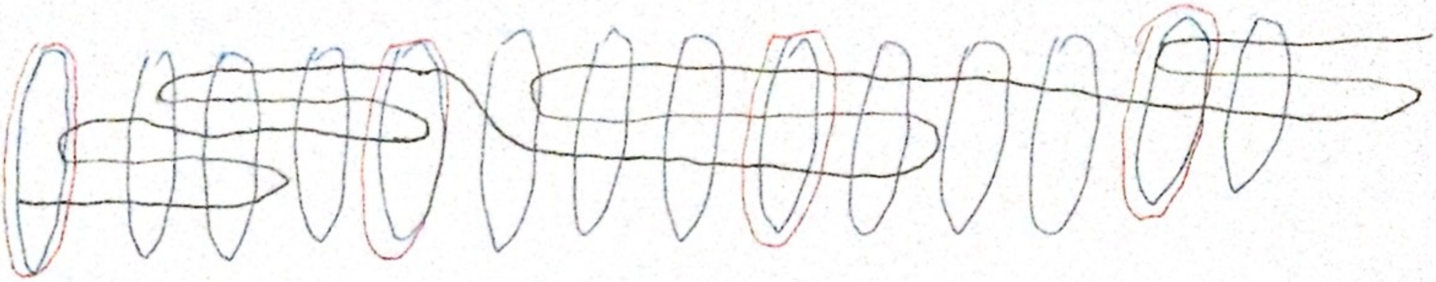


Lemma 2.4.1: Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von k disjunkten (X,X')-Wegen, $\mathcal{Q}$ eine Menge von k disjunkten $(Y'-Y)$-Wegen und $B_1 \dots B_k$ eine Liste von k disjunkten zusammenhängenden Mengen, die alle Wege aus $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ treffen. Dann gibt es in $H := \bigcup \mathcal{P} \cup \bigcup \mathcal{Q} \cup \bigcup_{i=1}^{k} G[B_i]$ k disjunkte $(X-Y)$-Wege.

Beweis: Angenommen nicht. Nach dem Satz von Menger gibt es in H einen $(X-Y)$-Trenner S der Größe $< k$. Dann gibt es $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$ und $i \leq k$ mit $S \cap (P \cup Q \cup B_i) = \emptyset$, und es gibt einen X-Y Weg in $P \cup Q \cup G[B_i]$ ↯ $\square$

Lemma 2.4.2: Sei $N = (B, (\emptyset), \emptyset)$ eine $(0,0,n)$-Halskette ohne lange Sprünge oder $(1,n)$-Sprünge, aber sodass es k disjunkte $(B_1 - B_n)$-Wege gibt. Sei $P_1 \dots P_k$ eine Folge von k disjunkten $(B_1 - B_n)$-Wegen, die so wenig Kanten außerhalb von $\bigcup_{i=1}^{n} G[B_i]$ wie möglich benutzt. Sei $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq a \leq b \leq n$ mit $b \geq a+k-1$. Dann kommt kein Element von B_b vor einem Element von B_a auf P_i.

Beweis: Angenommen schon. O.B.d.A. gilt $i = k$. Sei $x \in P_k \cap B_a$ und $y \in P_k \cap B_b$ mit y vor x auf P_k. Sei e eine Kante von yP_kx, die in kein $G[B_i]$ liegt. Sei $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_{k-1}, P_k y\}$ und $\mathcal{Q} = \{P_1, \dots P_{k-1}, xP_k\}$. Nach Lemma 2.4.1 gibt es k disjunkte Wege von B_1 nach B_n in $\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} G[B_j]\right) - e$, was der Minimalität von $P_1 \dots P_k$ widerspricht. ↯ $\square$



Lemma 2.4.3: Sei $N = (\mathcal{B}, (\emptyset), \emptyset)$ eine $(0,0,0,(n-1)(k-1)+1)$-Halskette ohne lange Sprünge oder $(1, (n-1)(k-1)+1)$-Sprünge, aber sodass es k disjunkte $(B_1 - B_{(n-1)(k-1)+1})$-Wege gibt. Dann gibt es eine von N getragene $(k, 0, 0, n)$-Halskette $N' = (\mathcal{B}', \mathcal{A}', \emptyset)$, sodass:

(i) $B_{(j-1)(k-1)+1} \subseteq B'_j$

(ii) Für $(j-1)(k-1)+1 \leq x \leq j(k-1)+1$ trifft B_x nur Perlen B'_y mit $y \in \{j, j+1\}$.

Beweis: Seien $P_1 \dots P_k$ eine Folge von k disjunkten $(B_1 - B_{(n-1)(k-1)+1})$-Wegen, die so wenig Kanten außerhalb von $\bigcup^{(n-1)(k-1)} G[B_i]$ wie möglich enthalten. Für $1 \leq i \leq k$ und

$1 \leq j \leq n$ sei $x_{i,j}$ der erste Punkt von P_i in $B_{(j-1)(k-1)+1}$.

Für $1 \leq j < n$ sei $B'_j = B_{(j-1)(k-1)+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} x_{i,j} \mathring{P}_i \mathring{x}_{i,j+1}$. Nach Lemma 2.4.2 sind die B'_j disjunkt, und sie bilden die Perlen der gewünschten Halskette. $\square$

<u>Satz 2.4.4</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $t, s, z \in \mathbb{N}$. Sei $n' = n + 2(s-1)$. Sei N eine langsprunglose $(t, s, z, 2t(n'-1))$-Halskette in G, sodass es zwischen je zwei Perlen $t+s+z+1$ disjunkte Wege gibt. Dann gibt es eine von N getragene $(t+1, s, z, n)$- oder $(t, s+1, z, n)$-Halskette.

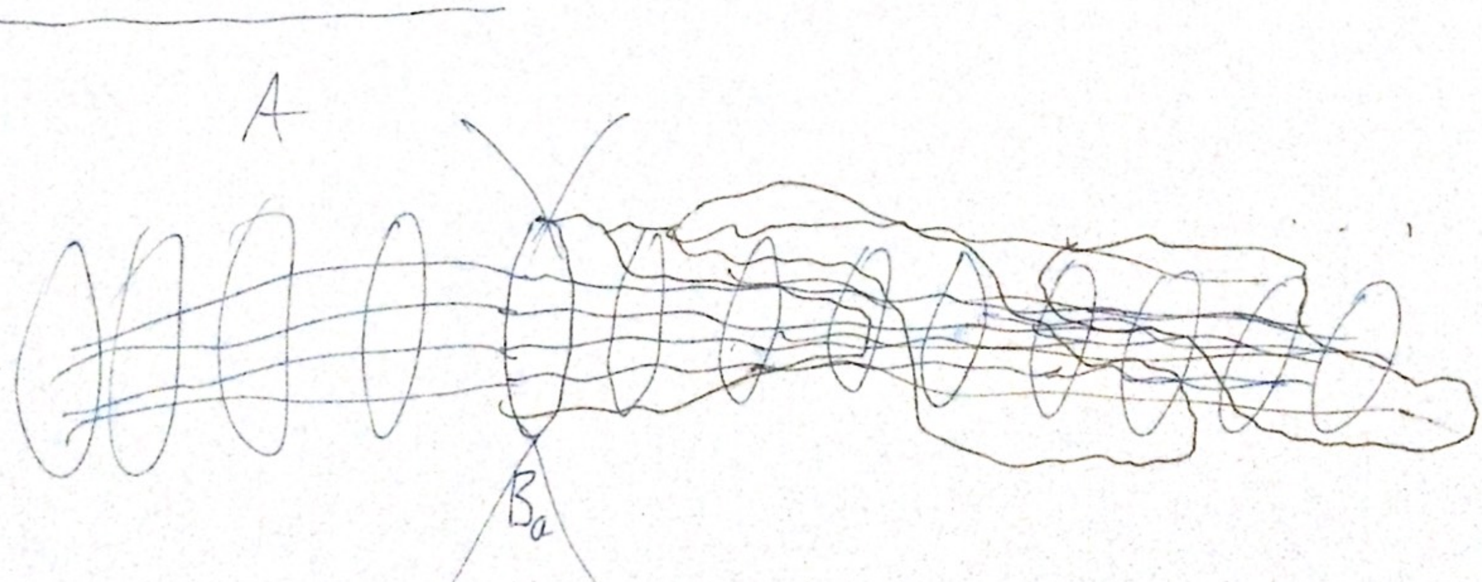
<u>Beweis</u>: Sei $a := s+2$ und $b := a + t(n'-1)$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $z = 0$ gilt, indem wir ggf. die Nabe von N löschen. Sei $N := (\mathcal{B}, \mathcal{M}, \emptyset)$. Da N langsprunglos ist, gibt es eine Separation (A, B) mit $A \cap B = B_a \cup B_b$, $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_a \subseteq A$, $B_a \cup B_{a+1} \cup \ldots \cup B_b \subseteq B$ und $B_b \cup \ldots \cup B_{2t(n'-1)} \subseteq A$.

Sei $\mathcal{P}_0$ eine Menge von $s+t+1$ disjunkten $(B_a\text{-}B_b)$-Wegen in G.

Fall 1: $t+1$ Elemente von $\mathcal{P}_0$ liegen in B. Sei $N' = (\mathcal{B}'; (\emptyset), \emptyset)$ die $(0, 0, 0, b-a+1)$-Halskette in $G[B]$ mit $B_i' := B_{i+a-1}$. Nach Lemma 2.4.3 gibt es eine $(t+1, 0, 0, n')$-Halskette $N'' = (\mathcal{B}''; (\emptyset), \emptyset)$, die von N' getragen wird, sodass:

(i) $B'_{(j-1)t+1} \subseteq B''_j$

(ii) Für $(j-1)t+1 \leq x \leq jt+1$ trifft B_x nur Perlen B_y' mit $y \in \{j, j+1\}$.



Sei $B_1''' = \bigcup_{j=1}^{s} B_j'' \cup \bigcup_{i=1}^{a+(s+1)t} B_i$. Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von s disjunkten $(X_1''-Y_s'')$-Wege in $\bigcup_{j=1}^{s} B_j''$ und $\mathcal{Q}$ eine Menge von s disjunkten $(X_1 - Y_{a+(s+1)t})$-Wegen in $\bigcup_{i=1}^{a+(s+1)t} B_i$. Nach Lemma 2.4.1 gibt es in $G[B_1''']$ eine Menge von s disjunkten $(X_1 - Y_s'')$-Wegen. Ähnlicherweise gibt es eine Menge von s disjunkten $(X''_{n+s-1} - Y_{2t(n'-1)})$-Wege in $B_n''' = \bigcup_{j=n+s-1}^{n'} B_j'' \cup \bigcup_{i=a+(n+s-1)t}^{2t(n'-1)} B_i$. Dann nehmen wir die Halskette:

$$\left(\left(B_1''', B_{s+1}'', B_{s+1}'', \dots B_{n+s-2}'', B_n'''\right), \left(M_s'', M_{s+1}'', \dots M_{n+s-2}'', M_{2t(n'-1)}\right), \emptyset \right)$$

Fall 2: $s+1$ Elemente von $\mathcal{P}_0$ liegen in A. Falls $s=t$, so können wir dasselbe Argument anwenden mit A und B vertauscht. Also angenommen $s+1 \leq t$. Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von $s+1$ disjunkten $(B_{a-1} - B_{b+1})$-Wegen in $G \setminus B$. Sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von $s+1$ disjunkten

$(X_1; Y_{a-1})$-Wegen in $G \setminus B$. Sei Q' eine Menge von $s+1$ disjunkten $(X_{b+1}-Y_{b+s})$-Wegen in $G \setminus B$. Nach Lemma 2.4.1 für P, Q und $B_1, B_2 \dots B_{s+1}$ gibt es eine Menge P' von $s+1$ disjunkten $(B_b - Y_{a-1})$-Wegen in $G \setminus B$. Nach Lemma 2.4.1 für P', Q' und $B_{b+1}, \dots B_{b+s+1}$ gibt es eine Menge P'' von $s+1$ disjunkten $(X_{b+1} - Y_{a-1})$-Wegen in $G \setminus B$. Also bilden $B_a, B_{a+1}, \dots B_b \cup \bigcup P''$ die Perlen einer $(t, s+1, 0, m)$-Halskette mit $m \geq n$. $\square$

2.5: Viele Lange Sprünge.

Lemma 2.5.1: Sei G ein Graph und seien $t, s, z, \in \mathbb{N}$ mit $s > 0$. Sei N eine (t, s, z, m)-Halskette mit $m \gg n$, sodass es für $i \leq m$ einen $(1, i)$-Sprung gibt. Dann gibt es in G eine von N getragene $(t+1, s-1, z, m)$- oder $(t, s-1, z+1)$-Halskette.

Beweis: Sei P eine Menge von s disjunkten $(X_1 - Y_1)$-Wegen in B_1. Sei Q_i ein $(1, i)$-Sprung und sei v_i die Endecke von Q_i in B_i. Wir können

Q_i durch B_1 zu einem Weg Q_i' erweitern, der genau einen Weg aus $\mathcal{P}$ trifft. Also gibt es $P \in \mathcal{P}$, sodass $S := \{i \in \mathbb{Z}_m : Q_i' \cap P \neq \emptyset\}$ M Elemente hat mit $M >> n$. Sei $H := P \cup \bigcup_{i \in S} Q_i'$ und sei $V = \{v_i : i \in S\}$ als linear geordnete Menge betrachtet mit $v_i \leq v_j$ falls $i \leq j$. Nach Lemma 2.2.8 gibt es in H eine $(1,0,0,n)$- oder $(0,0,1,n)$-Halbkette $(\mathcal{B}', \mathcal{M}', Z')$ und eine aufsteigende Folge $x_1 < x_2 < \dots x_n$ in S mit $v_{x_i} \in B_i'$.

Indem wir die erste Perle aus N löschen und die Wege in $\mathcal{P} \setminus \{P\}$ in der zweiten hinzufügen, finden wir eine von H disjunkte $(t, s-1, z, m-1)$-Halbkette. Wir nehmen eine Kontraktion $(\mathcal{B}'', \mathcal{M}'', Z)$ davon mit $v_{x_i} \in B''_{x_i}$. Dann ist die gewünschte Halbkette

$$\left((B_i' \cup B_i'')_{i \in \mathbb{Z}_n}, (M_i' \cup M_i'')_{i \in \mathbb{Z}_n}, Z \cup Z' \right)$$

$\square$

Korollar 2.5.2: Sei G ein Graph und seien $\theta, n \in \mathbb{N}$. Sei $m \gg n$. Sei N eine $(\theta; m)$-Halskette in G. Dann gibt es eine von N getragene $(\theta'; n)$-Halskette in G, mit $\theta' \geq \theta$ und langsprunglos falls $\theta = \theta'$.

Beweis: Direkt aus Lemma 2.3.2 und Lemma 2.5.1. $\square$

Korollar 2.5.3: Sei G ein Graph und seien $\theta, n \in \mathbb{N}$. Sei $m \gg \theta, n$. Sei N eine aneinandergereihte $(\theta; m)$-Halskette in G, sodass es zwischen je zwei Perlen von N mindestens $\theta + 1$ disjunkte Wege gibt. Dann gibt es eine von N getragene ~~$(\theta+1; n)$-Halskette~~ aneinandergereihte $(\theta + 1; n)$-Halskette in G.

Beweis: Direkt aus Satz 2.4.4 und Korollar 2.5.2. $\square$

Der Halskettensatz folgt nun aus Korollar 2.2.6 und Korollar 2.5.3.

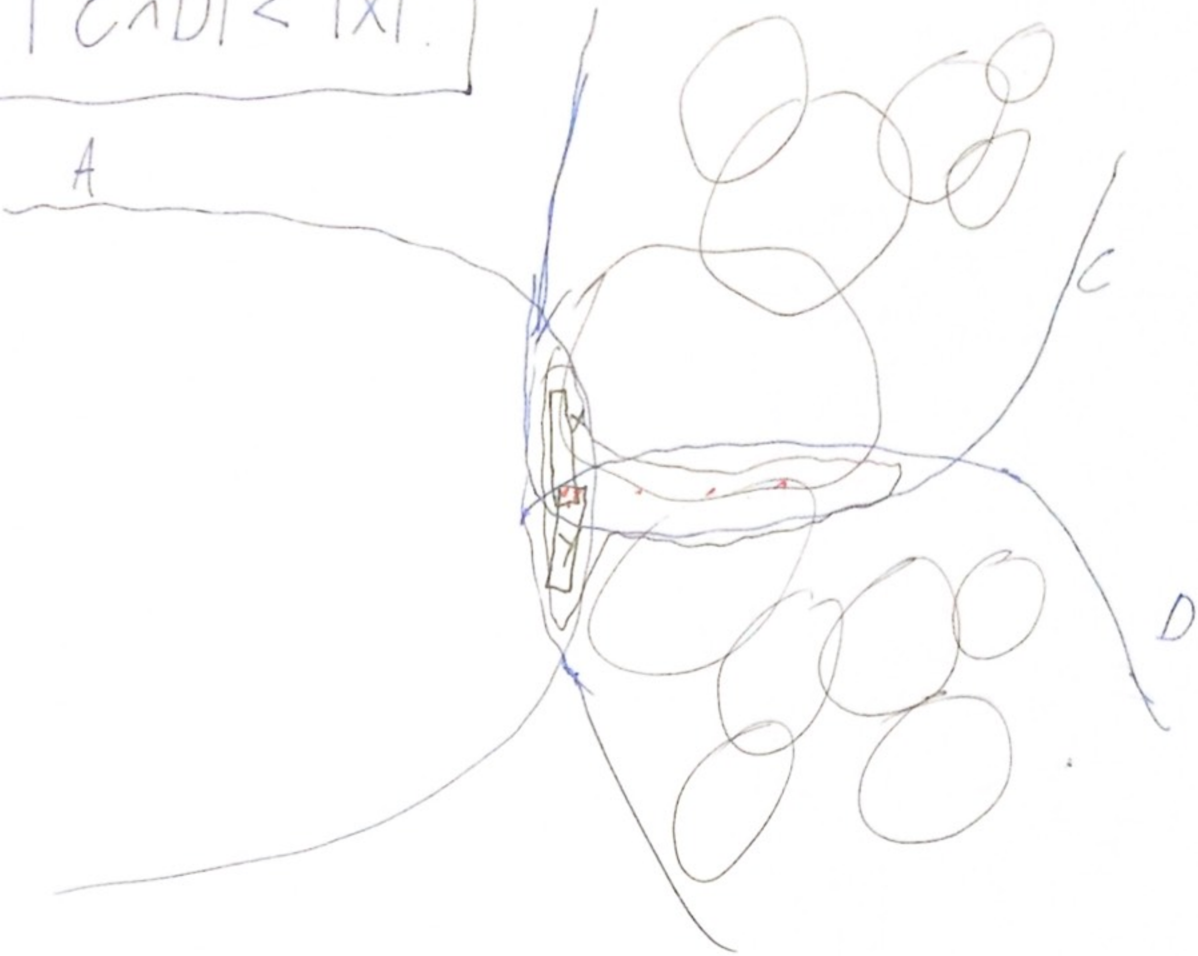
2.5: Der Gittesatz.

Satz 2.5.1: Seien $\theta, n \in \mathbb{N}$ und sei G ein Graph von Baumweite $\geq n+\theta-1$. Dann gibt es in G eine θ-zusammenhängende Menge der Größe n.

Beweis: Sei (A, B) eine maximale Separation der Ordnung $\leq n$ in G, sodass $G[B]$ keine Baumzerlegung mit Weite $\leq n+\theta-2$ enthält, sodass $A \cap B$ in einem Teil enthalten ist. [es gibt solche Separationen, z.B. $(\emptyset, V(G))$]. Dann gilt $|A \cap B| = n$, da sonst für ein beliebiges Element v von $B \setminus A$ auch $(A \cup \{v\}, B)$ die Bedingung erfüllen, was der Maximalität von (A, B) widerspricht.

Wir beweisen nun, dass $A \cap B$ sogar in $G[B]$ θ-zusammenhängend ist. Angenommen nicht. Dann gibt es Teilmengen X, Y von $A \cap B$ mit $|X| = |Y| \leq \theta$, sodass es in $G[B]$ keine Menge von $|X|$ disjunkten $(X-Y)$-Wege gibt. Nach dem Satz von Menger gibt es eine Separation (C, D) von $G[B]$ mit $X \subseteq C$, $Y \subseteq D$

und $|C \cap D| < |X|$.

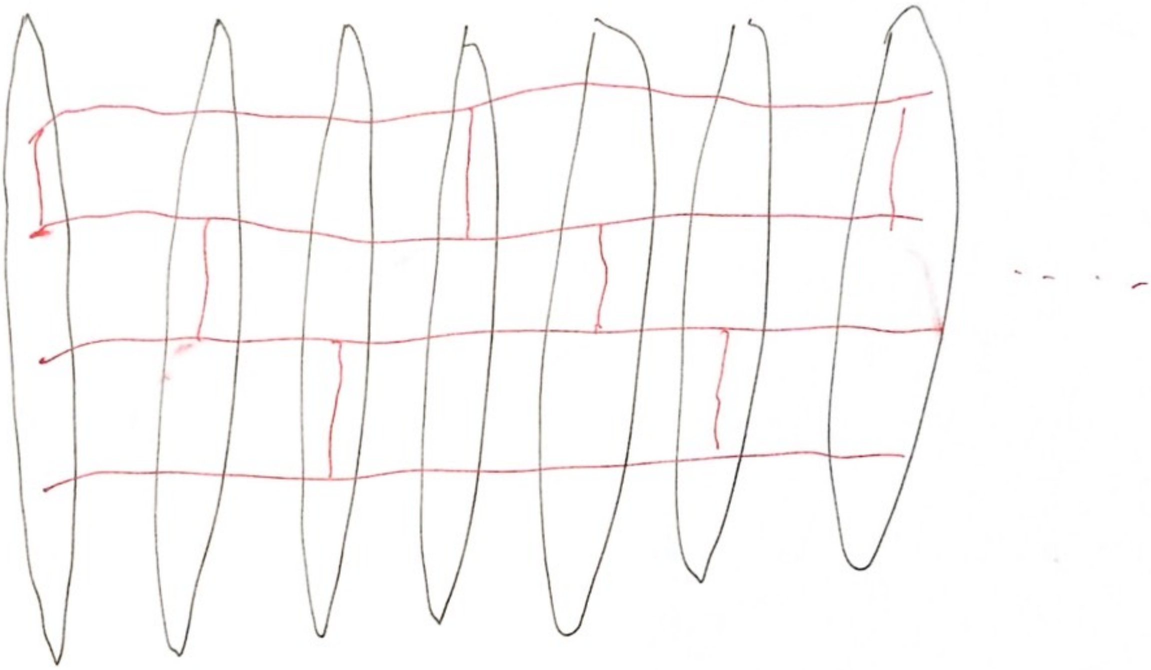


Wir betrachten die Separation $(A', B') := (A \cup C, D) > (A, B)$. Der Trenner davon ist $(A \cap D) \cup (C \cap D)$, was eine Teilmenge von $(A \cap B \setminus X) \cup (C \cap D)$ ist, also ist die Ordnung nicht mehr als $n - |X| + |C \cap D| < n$. Also gibt es eine Baumzerlegung (T', V') von $G[D]$ von Weite $\leq n+\theta-2$, sodass dieser Trenner in einem Teil $V'_{t'}$ enthalten ist. Ähnlicherweise gibt es eine Baumzerlegung (T'', V'') von Weite $\leq n+\theta-2$ von $G[C]$, sodass $(A \cup D) \cap C$ in einem Teil $V''_{t''}$ enthalten ist.

Dann ist

$$\left(T' \sqcup T'' \sqcup \{t_0\}, \mathcal{V}' \cup \mathcal{V}'' \cup \{(t_0, (A\cap B)\cup(C\cap D))\}\right)$$

eine Baumzerlegung von $G[B]$, die die Bedingung doch erfüllt. $\#$ $\square$

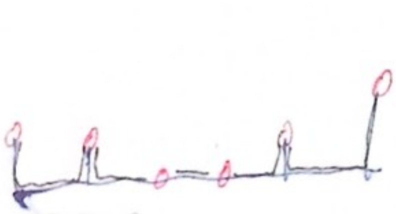


<u>Lemma 2.5.2</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei G ein Graph, der eine $(\theta; m)$-Halbkette enthält mit $m \gg \theta \gg n$. Dann hat G einen $n\times n$-Gitter Minor.

<u>Beweis</u>: Sei $N = (\mathcal{B}, M, Z)$ eine (t,s,z,m)-Halbkette mit $t+s+z = \theta$.

<u>Fall 1</u>: $z \geq n^2$. Indem wir $2n(n-1)$ von den Perlen kontrahieren kriegen wir einen $K_{n^2, 2n(n-1)}$-Minor, und $K_{n^2, 2n(n-1)}$ enthält eine Unterteilung von dem $n \times n$-Gitter.

<u>Fall 2</u>: $t \gg \theta$. Sei $\mathcal{P}$ die Menge von t disjunkten $(B_1 - B_m)$-Wegen, die uns die Halbkette N liefert. Für $1 \leq i \leq m$, sei G_i der Graph auf $\mathcal{P}$, mit einer Kante von P nach P', falls es in $G[B_i]$ einen $(P-P')$-Weg gibt, der keinen anderen Weg aus $\mathcal{P}$ trifft. Jedes G_i ist zusammenhängend. Es gibt nicht mehr als $2^{\frac{\theta(\theta-1)}{2}}$ Möglichkeiten für G_i, also gibt es $1 \leq i_1 < i_2 < \dots i_{n(n-1)} \leq m$ und ein Graph G' auf $\mathcal{P}$ mit $G_{i_j} = G'$ für $j \leq n(n-1)$. Nach Lemma 2.2.1 gibt es in G' eine Folge $P_1 \dots P_n$, sodass es für $1 \leq k < n$ ein Weg in G' von P_k nach P_{k+1} gibt, der durch keinen anderen P_l läuft



Für $1 \leq x \leq n$ und $1 \leq y < n$, sei Q_{xy} ein $(P_y - P_{y+1})$-Weg in $G[B_{i_{(n-1)(x-1)+y}}]$, der keinen anderen P_z trifft.

Dann enthält $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} P_i \cup \dot{\bigcup}_{x=1}^{n} \dot{\bigcup}_{y=1}^{n-1} Q_{xy}$ einen $(n \times n)$-Gitter Minor.