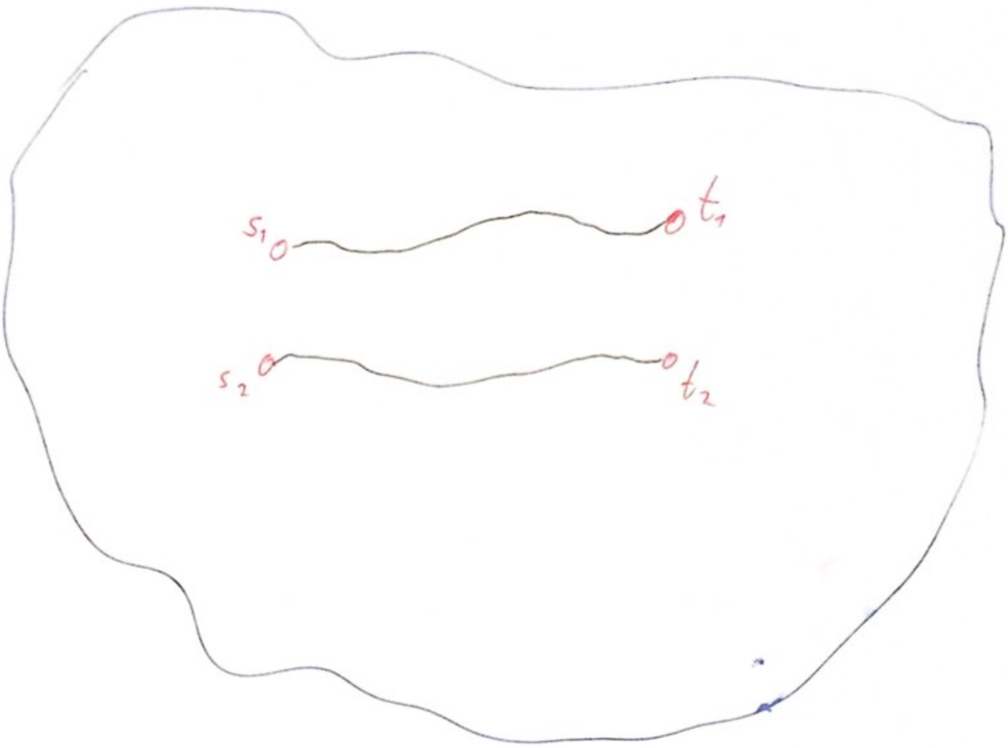
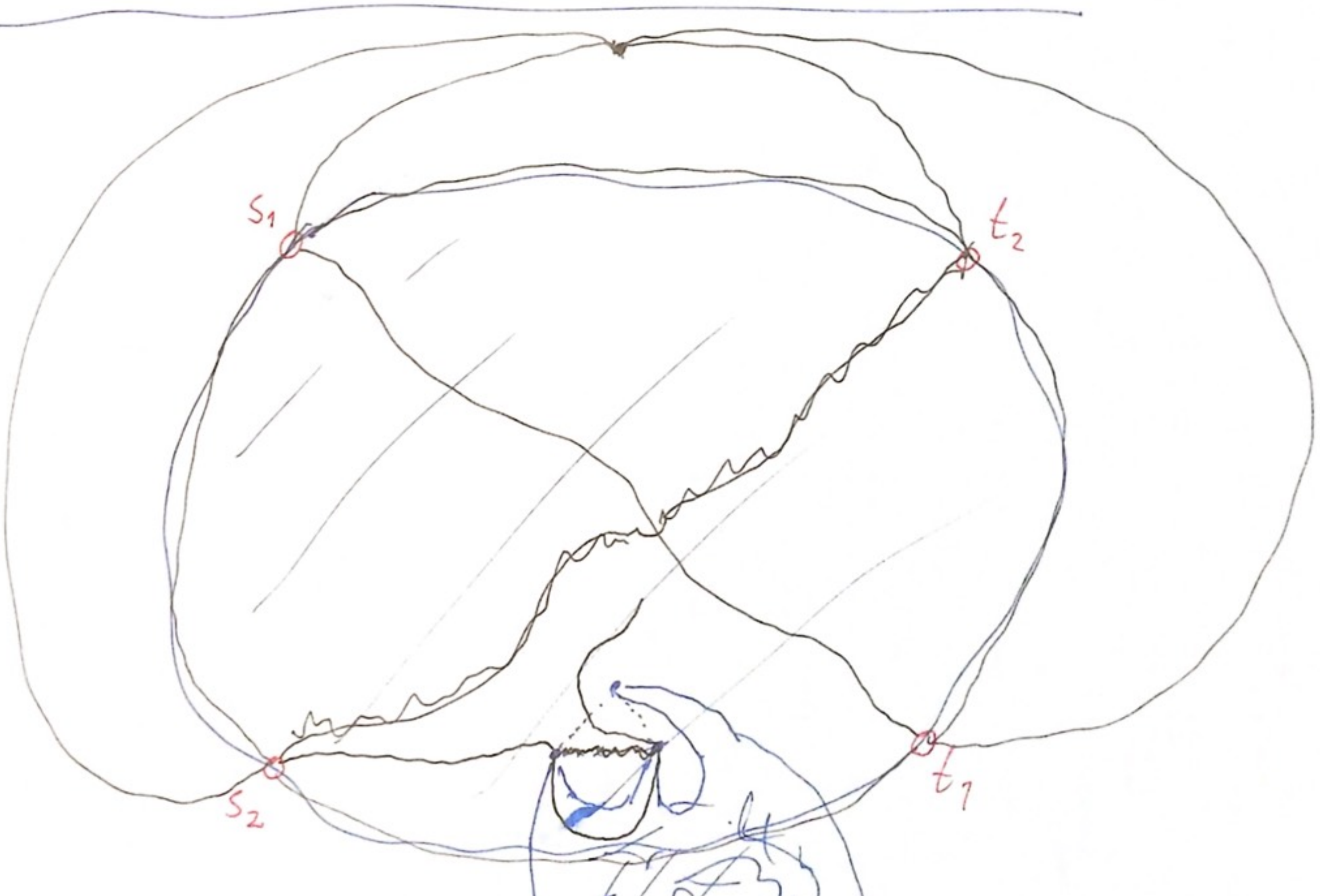
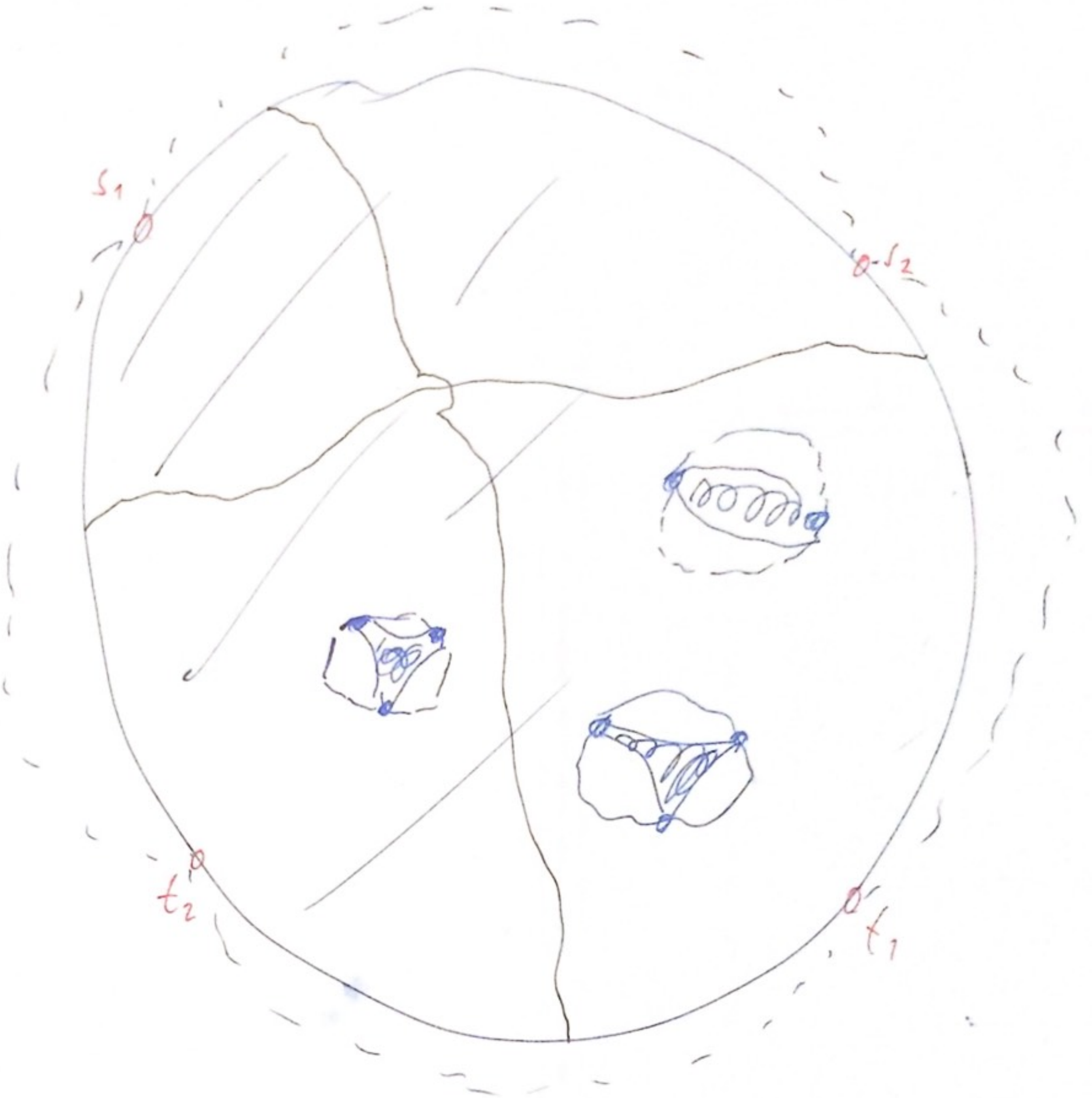
Kapitel 3: Der Kreuzsatz und Graphenwiedergaben



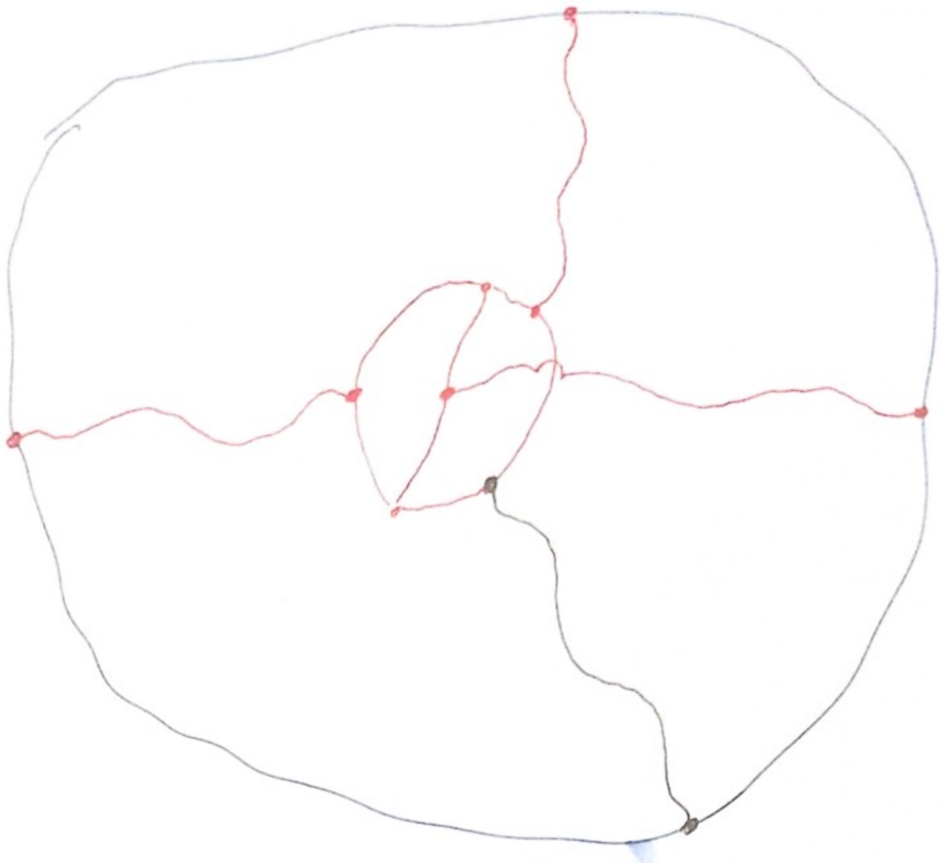




3.1: C-Kreuze und Dreibeine.

Definition 3.1.1: Sei C ein Kreis in einem Graphen G. 2 disjunkte Wege P_1, P_2 bilden ein C-Kreuz, wenn $C \cup P_1 \cup P_2$ ein TK^4 ist. Gibt es kein C-Kreuz, so nennen wir G C-Kreuzfrei.

Definition 3.1.2: Sei C ein Kreis in G. G heißt C-Reduziert falls es keine Separation (A, B) von G gibt mit $|A \cap B| \leq 3$, $C \subseteq A$ und $B \setminus A \neq \emptyset$.



<u>Definition 3.1.3</u>: ~~[illegible]~~ Ein <u>θ</u> in einem Graphen G besteht aus 3 $(v$-$w)$-Wegen für Ecken v und w, die sich nur in ihren Endecken treffen. Sei C ein Kreis in G. Ein <u>C-Dreibein</u> in G ist ein θ T, sodass es 3 disjunkten ~~Wegen~~ $(T$-$C)$-Wege gibt, die an internen Ecken von verschiedenen Wegen von T anfangen.

<u>Definition 3.1.4</u>: Sei G ein Graph und seien $E, F \subseteq V(G)$. Für $I \subseteq E$ ist eine <u>Verbindung</u> von I nach F aus E ist eine Menge von disjunkten E-F Wegen, deren

Menge von Anfangsecken I ist. I heißt F-Verbindbar aus E, falls es eine Verbindung von I auf F aus E gibt.

Lemma 3.1.5: Sei G ein Graph und seien $E, F \subseteq V(G)$. Seien $I, J \subseteq E$ F-Verbindbar aus E mit $|J| > |I|$. Dann gibt es $i \in J \setminus I$, sodass $I \cup \{i\}$ F-Verbindbar aus E ist.

Beweis: Angenommen nicht. Indem wir $(E \setminus (I \cup J))$ aus G löschen, können wir annehmen, dass $E = I \cup J$ gilt. Wir können auch o.B.d.A. annehmen, dass $E \cap F = \emptyset$. Sei $\mathcal{P}$ eine Verbindung von I nach F aus E. Nach dem Satz von Menger gibt es für jedes $i \in J \setminus I$ eine Separation (A_i, B_i) von $G[V(G) \setminus E \cup I \cup \{i\}]$ mit $I \cup \{i\} \subseteq A_i$, $F \subseteq B_i$ und $|A_i \cap B_i| \leq |I|$, sodass $A_i \cap B_i$ aus einer Ecke von jedem Weg in $\mathcal{P}$ besteht.

Sei $A = \bigcup_{i \in J \setminus I} A_i$ und $B = \bigcap_{i \in J \setminus I} B_i$. Dann

$$A \cup B = \bigcup_{i \in J \setminus I} (A_i \cup B_i) = V(G).$$

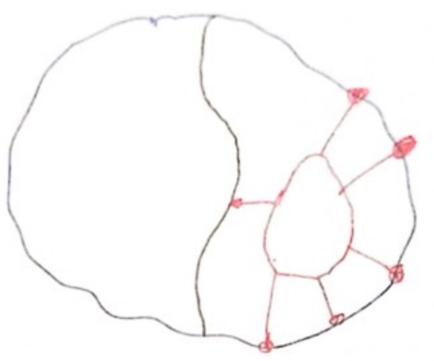
Es gilt $A \cap B \subseteq \bigcup_{i \in J \setminus I} (A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup \mathcal{P}$. Wir zeigen nun, dass $A \cap B$ nur ein Element jedes Weges aus $\mathcal{P}$ enthalten kann. Sei $P \in \mathcal{P}$ und sei $x \in A \cap B \cap V(P)$. Dann gibt es $i \in J \setminus I$ mit $x \in A_i \cap B_i$. Dann $P\mathring{x} \subseteq A_i \setminus B_i \subseteq A \setminus B$, also liegt keine Ecke vor x auf P in $A \cap B$. Also gilt $|P \cap A \cap B| \leq 1$ für jeden solchen Weg, und deshalb $|A \cap B| \leq |\mathcal{P}| = |I| < |J|$, was die F-Verbindbarkeit von J widerspricht.

<u>Lemma 3.1.6:</u> Sei C ein Kreis in einem Graphen G, der C-Kreuzfrei und C-reduziert ist. Dann gibt es kein C-Dreibein in G.

<u>Beweis:</u> Angenommen schon, und sei T ein C-Dreibein in G. Da G C-reduziert ist, gibt es nach dem Satz von Menger eine Menge J von 4 Ecken von T, die C-Verbindbar aus T ist. Per Definition gibt es eine Menge I von internen Ecken von den 3 Wegen von T, die C-Verbindbar aus T ist.

Nach Lemma 3.1.5 gibt es $i \in J \setminus I$, sodass es eine Verbindung $\mathcal{P}$ von $I \cup \{i\}$ nach C aus T gibt. Dann enthält $T \cup \bigcup \mathcal{P}$ ein C-Kreuz. $\lightning$ $\square$

3.2: Der Kreuzsatz



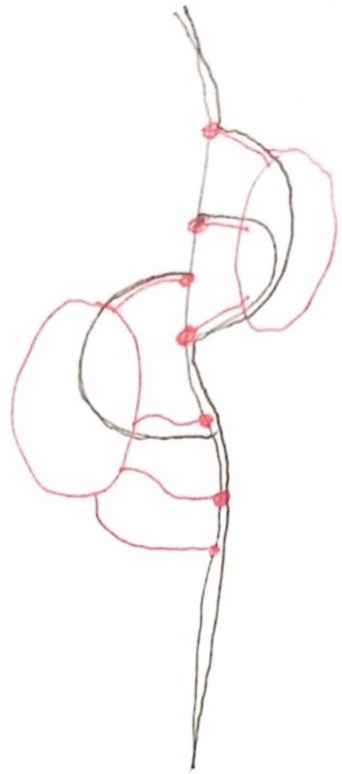
Definition 3.2.2 Sei H ein Teilgraph eines Graphen G. ~~Eine H-Brücke ist ein maximaler Teilgraph B von $G - E(H)$, sodass $B \setminus H$ auch zusammenhängend ist. Konkreter gibt es 2 Fälle:~~

~~so~~ Eine H-Brücke ist ein Teilgraph von einem dieser 2 Typen:

→ Eine Kante in $E(G) \setminus E(H)$ mit beiden Endecken in H.

→ Eine Zusammenhangskomponente K von $G \setminus H$, zusammen mit allen Kanten von K nach H.

Die Ecken von H in der Brücke heißen <u>Füße</u> der Brücke.



<u>Lemma 3.2.3</u>: Sei G ein Graph und sei C ein Kreis in G, sodass G C-reduziert ist, aber $G \neq C$. Dann gibt es einen C-Weg P in G, sodass jede Brücke von $C \cup P$ ein Fuß in $C \setminus P$ hat.

<u>Beweis</u>: Da G C-Reduziert ist und $G \neq C$ gibt es einen C-Weg in G. Sei $|G| = n$. Für einen G-Weg P nennen wir eine $C \cup P$ Brücke B <u>schlecht</u>, falls

jeder Fuß von B auf P liegt. Für $i \leq n$, sei $b_i(P)$ die Anzahl von schlechten $C \cup P$ Brücken mit i internen Ecken. Sei $g(P)$ die Anzahl von Ecken in $G \setminus (C \cup P)$, die in ~~[illegible]~~ nicht-schlechten Brücken liegen. Sei $f(P)$ die Folge $g(P), b_n(P), b_{n-1}(P) \dots b_1(P)$. Sei P ein C-Weg, sodass die Folge $f(P)$ lexicographisch maximal ist. Angenommen es gibt eine schlechte $C \cup P$-Brücke B. Wähle eine solche Brücke B mit minimal viele interne Ecken. Seien x, y die ersten und letzten Füßen von B auf P, sei Q ein $(x-y)$-Weg in B, und sei $P' = PxQyP$.

Da G C-reduziert ist gibt es eine weitere Brücke B' mit einem Fuß zwischen x und y auf P. Da $g(P') \leq g(P)$ ist B' schlecht. Sei B'' die $C \cup P'$-Brücke, die B' enthält und sei i die Anzahl von internen Ecken von B''. Dann gilt $b_i(P') > b_i(P)$, aber $b_j(P') \geq b_j(P)$ für $j \geq i$. Also gilt $f(P') > f(P)$, was die Maximalität von $f(P)$ widerspricht. $\#$

Also gibt es keine schlechte P-Brücken $\square$ 43

<u>Satz 3.2.4</u> (Der Kreuzsatz). Sei G ein Graph und C ein Kreis in G, sodass G C-Reduziert und C-Kreuzfrei ist. Dann ist G auf so einer Weise plättbar, dass C der äußere Kreis bildet.

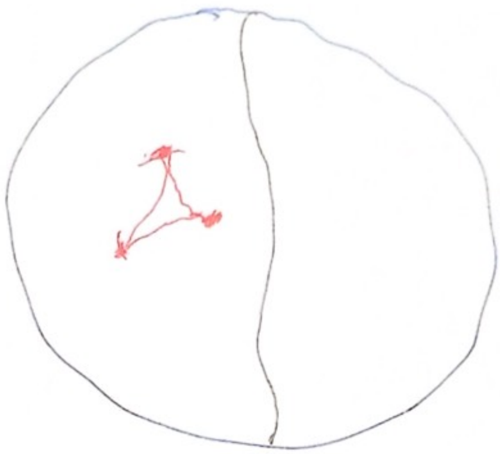
<u>Beweis</u>: Induktion nach $|V(G)| + |E(G)|$

<u>Induktionsanfang</u>: $G = C$ ✓

<u>Induktionsschritt</u>: Nach Lemma 3.2.3 gibt es einen C-Weg P, sodass jede $C \cup P$-Brücke ein Fuß in $C - P$ hat. Seien P_1 und P_2 die 2 Teilwege von C, die die Endecken von P verbinden. Sei $C_1 := P \cup P_1$ und $C_2 := P \cup P_2$. Sei G_i die Vereinigung von C_i mit allen $C \cup P$-Brücken in G, die ein Fuß auf $P_i - P$ haben. Es gibt keine $C \cup P$-Brücke mit Füße in $P_1 - P$ und $P_2 - P$,

da G C-Kreuzfrei ist. Also gilt $G_1 \cap G_2 = P$, und $G_1 \cup G_2 = G$.

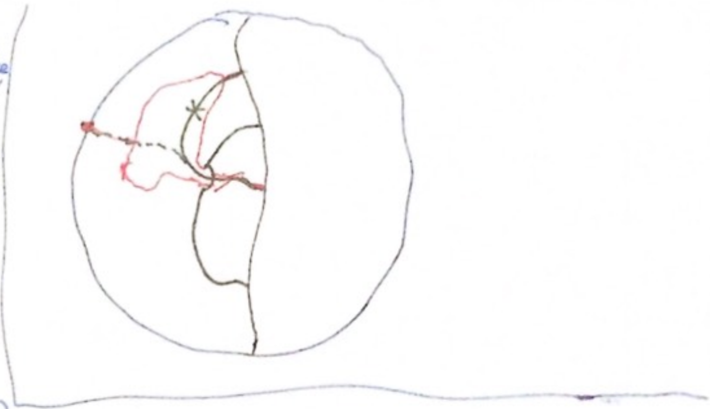
Wir zeigen nun, dass G_1 C_1-Reduziert und C_1-Kreuzfrei ist.



Gäbe es eine Separation (A, B) von G_1 mit $|A \cap B| \leq 3$, $C_1 \subseteq A$ und $B \setminus A \neq \emptyset$, so wäre $(A \cup V(G_2), B)$ eine Separation von G, die bezeugen würde, dass G nicht C-reduziert ist. Also ist G_1 C_1-Reduziert.

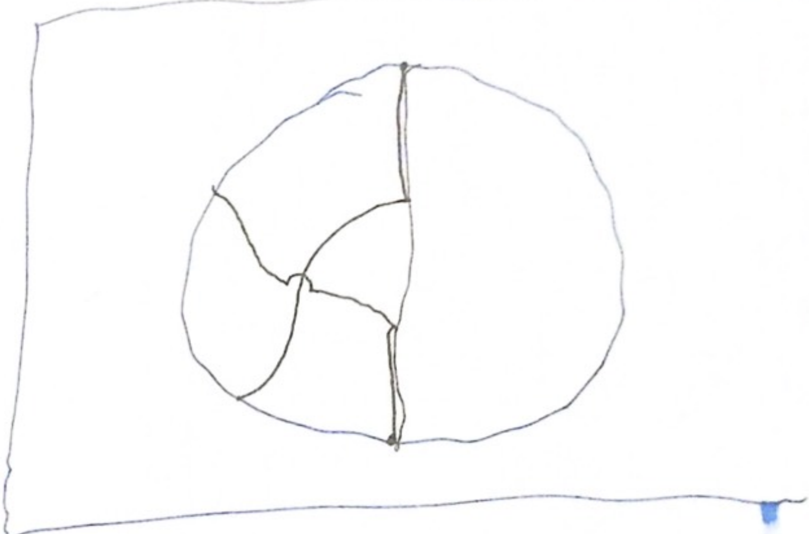
Angenommen nun es gibt ein C_1-Kreuz P', P'' in G_1. Wir wählen P', P'', sodass die Anzahl k von Endecken von P' oder P'', die auf P liegen, minimal ist.

Fall 1: $k = 4$. Die $C \cup P$-Brücke, die P' enthält, hat ein Fuß x, der auf $P_1 - P$ liegt. Also enthält diese Brücke einen $(x - P' \cup P'')$-Weg Q.

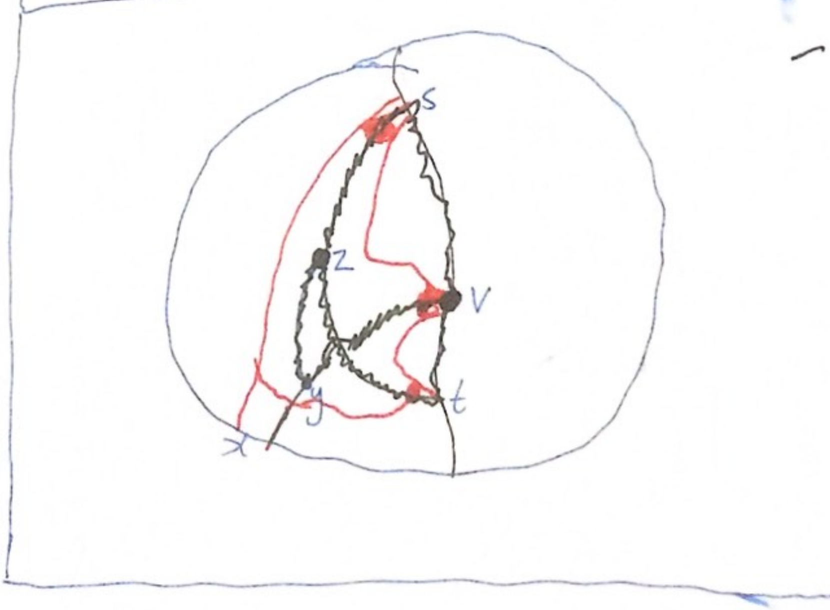


Dann enthält $P' \cup P'' \cup Q$ ein C-Kreuz, mit nur 3 Endecken auf P $\#$

Fall 2: $k \leq 2$. Dann enthält $P \cup P' \cup P''$ ein C-Kreuz. $\#$



Fall 3: $k = 3$. Seien o.B.d.A. die Endecken s und t von P' auf P. Die $C \cup P$-Brücke B, die P' enthält, hat ein Fuß x auf $P_1 - P$. Also enthält B einen $(P' - C)$-Weg Q.

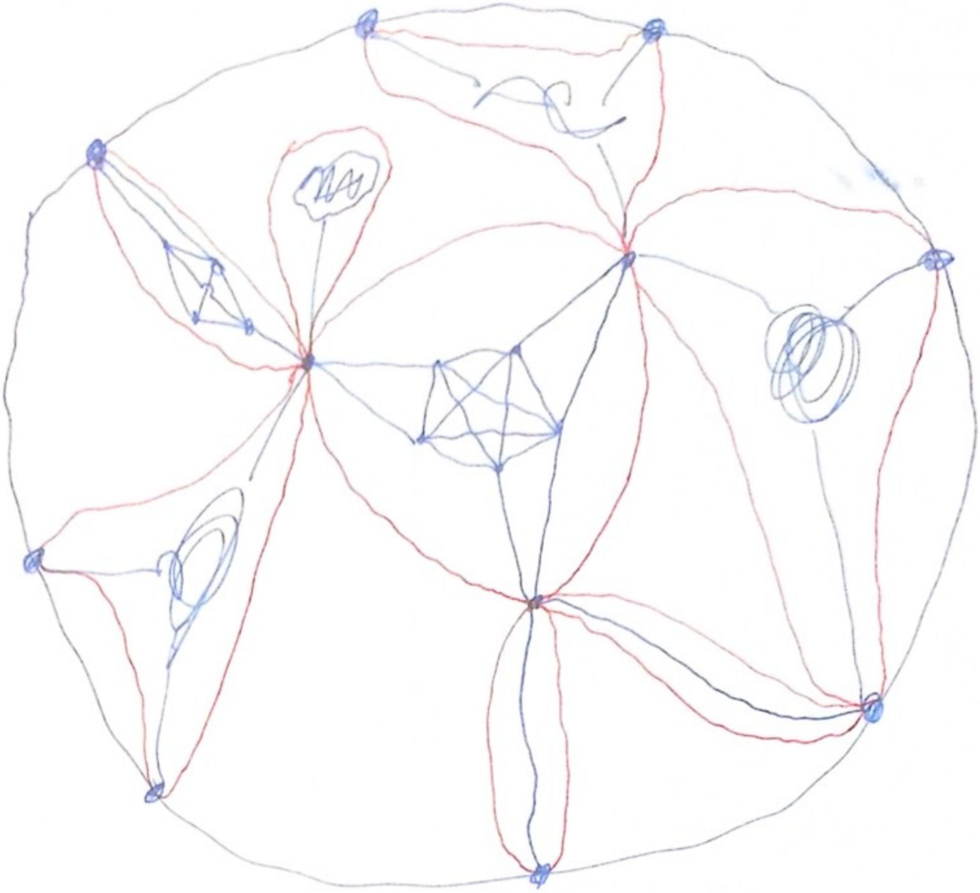


Fall 3.1: Q ist von P'' disjunkt. Dann enthält $P' \cup P'' \cup Q$ ein C_1-Kreuz mit nur 2 Endecken auf P ↯

Fall 3.2: Sei y die erste Ecke von Q auf P''. Sei z die Endecke von Q auf P' und v die Endecke von P'' auf P. Dann bilden die 3 $(v\text{-}z)$-Wege $vPsP'z$, $vPtP'z$ und $vP''yQz$ ein C-Dreibein in G, was Lemma 3.1.6 widerspricht. ↯

Also ist G_1 tatsächlich C_1-Kreuzfrei. Nach der Induktionshypothese gibt es eine Einbettung von G_1 in der Ebene mit C_1 als äußerem Kreis. Ähnlicherweise gibt es eine Einbettung von G_2 in der Ebene mit C_2 als äußeren Kreis. Wir können nun diese Einbettungen kombinieren, um die gewünschte Einbettung von G in der Ebene zu finden. ✓ □

3.3: Graphenwiedergaben



Definition 3.3.1: Eine *Gemälde* in einer Fläche Σ ist eine Menge Γ von endlich vielen abgeschlossenen Scheiben in Σ, sodass für $c \in \Gamma$ die Menge $\tilde{c} = c \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus \{c\}} c'$ nicht mehr als 3 Elemente hat. Wir schreiben $N(\Gamma)$ für $\bigcup_{c \in \Gamma} \tilde{c}$. Die Elementen von Γ heißen *Zellen*.

<u>Definition 3.3.2</u>: Sei G ein Graph und sei Ω eine zyklisch geordnete Menge von Ecken in G. Eine <u>Ω-Wiedergabe</u> von G ist ein Tripel (Γ, σ, π), wobei:

→ Γ eine Gemälde in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe Δ ist.

→ σ ~~ordnet~~ jeder Zelle c in Γ eine Teilmenge $\sigma(c)$ von $V(G)$ zuordnet.

→ $\pi : N(\Gamma) \to V(G)$ injektiv ist,

sodass:

(W1) $G = \bigcup_{c \in \Gamma} G[\sigma(c)]$

(W2) $\pi[\tilde{c}] = \sigma(c) \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus \{c\}} \sigma(c')$ für $c \in \Gamma$

(W3) $\bigcup \Gamma \cap \partial \Delta \subseteq N(\Gamma)$

(W4) $\pi[\bigcup \Gamma \cap \partial \Delta] = \Omega$, wobei die zyklische Ordnung von Ω die von $\partial \Delta$ entspricht.

Jeder Kreis C von G induziert eine zyklischen Ordnung auf seiner Eckenmenge, also gibt es einen entsprechenden Begriff von C-Wiedergabe.

<u>Satz 3.3.3</u>: Sei G ein Graph ~~[illegible]~~ und sei C ein Kreis in G. G ist genau dann C-Kreuzfrei, wenn es eine C-Wiedergabe von G gibt.

$\Leftarrow$: Angenommen es gibt ein C-Kreuz P_1, P_2 in G.

Jedes P_i besteht aus ~~Teilbögen~~ Teilwegen in Teilgraphen $G[\sigma(c)]$. Vereinigungen von entsprechenden ~~Teilbögen~~ Bögen in den Zellen c ergeben 2 Bögen Q_1, Q_2 in Δ, sodass $\partial\Delta \cup Q_1 \cup Q_2$ eine Einbettung von K^4 bildet. Dieser, zusammen mit 4 Bögen von einem ~~Ecke~~ Punkt x außerhalb von Δ nach ∂ bilden eine Einbettung von K^5 in der Ebene ⨳

$\Rightarrow$: Per Induktion nach $|V(G)|$.

Fall 1: G ist C-Reduziert. Es gibt nach dem Kreussatz eine Einbettung von G in Δ, sodass nur die Ecken von C auf Δ liegen, und zwar in derselben zyklischen Reihenfolge wie auf C.

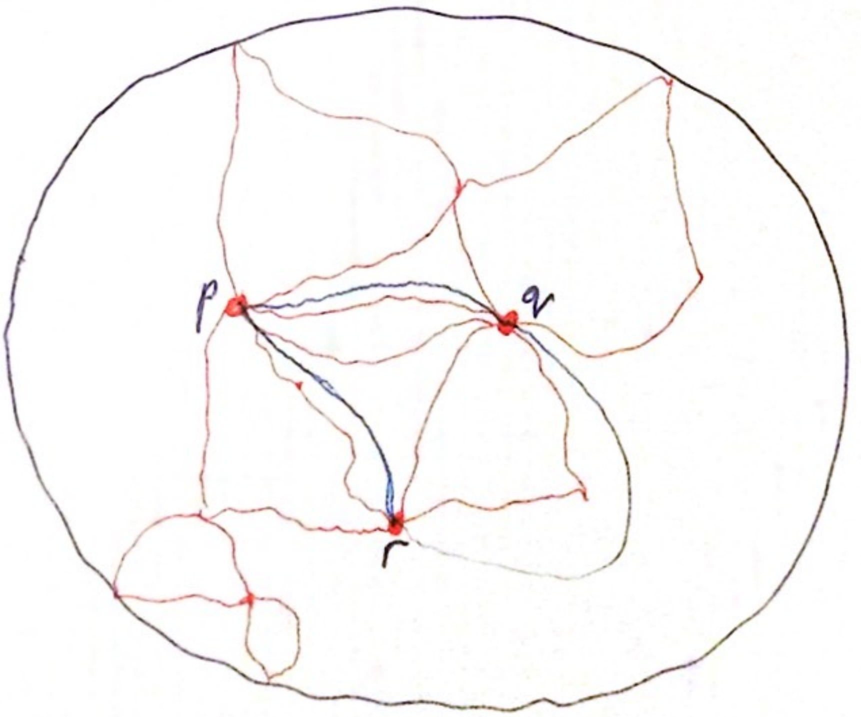
Nun bauen wir daraus eine C-Wiedergabe, indem wir das Bild jeder Kante e zu einer Kreisscheibe c_e aufdicken, sodass c_e keine weitere Ecken enthält und die c_e einander nur in Ecken treffen.

Fall 2: Es gibt eine ≤ 3-Separation (A,B) mit $C \subseteq A$ und $B \setminus A \neq \emptyset$. Sei (A,B) eine maximale solche Separation, sodass es nach dem Satz von Menger Wege von x nach allen Ecken in $A \cap B$ gibt, die sich nur in x treffen, für ein $x \in B \setminus A$.

Sei $G' = G[A] \cup K^{A \cap B}$. Aus einem C-Kreuz in G' könnten wir also eins in G bauen, indem wir ggf. eine Kante oder zwei Kanten des Kreuzes durch einen Weg in B über x ersetzen. G' ist also auch C-Kreuzfrei. Nach der IH gibt es eine C-Wiedergabe (Γ, σ, π) von G'.

<u>Fall 2.1:</u> Es gibt $c \in \Gamma$ mit $A \cap B \subseteq \pi(c)$. Dann können wir eine C-Wiedergabe $(\Gamma^\bullet, \sigma', \pi^\bullet)$ von G bauen, indem wir $\sigma(c)$ durch seine Vereinigung mit B ersetzen. ✓

<u>Fall 2.2:</u> Es gibt kein solches c. Dann $|A \cap B| = 3$.



Für $i \neq j$ in $A \cap B$, sei $c_{ij} \in \Gamma$ mit $i,j \in \sigma(c_{ij})$.

Dann $i,j \in c_{ij} \cap \bigcup_{c' \in \Gamma \setminus \{c_{ij}\}} c' = \pi[\tilde{c}_{ij}]$. Sei also

$A \cap B = \pi[\{p,q,r\}]$. Es gibt Bögen P_{pq} von

p nach q, P_{qr} von q nach r und P_{rp} von r nach p,

die Γ und einander nur in ihren Endecken treffen.

Sei c_{pqr} die abgeschlossene Kreisscheibe ~~mit~~ in Δ

mit Rand $P_{pq} \cup P_{qr} \cup P_{rp}$. Sei $\Gamma' = \{c \in \Gamma : c \not\subseteq c_{pqr}\} \cup$

$\cup \{c_{pqr}\}$. Für $c \in \Gamma'$, setze $\sigma'(c) := B \cup \bigcup_{\substack{c' \in \Gamma \\ c' \subseteq c_{pqr}}} \sigma(c)$

für $c = c_{pqr}$ und $\sigma(c)$ sonst. Es gilt $N(\Gamma') \subseteq N(\Gamma)$;

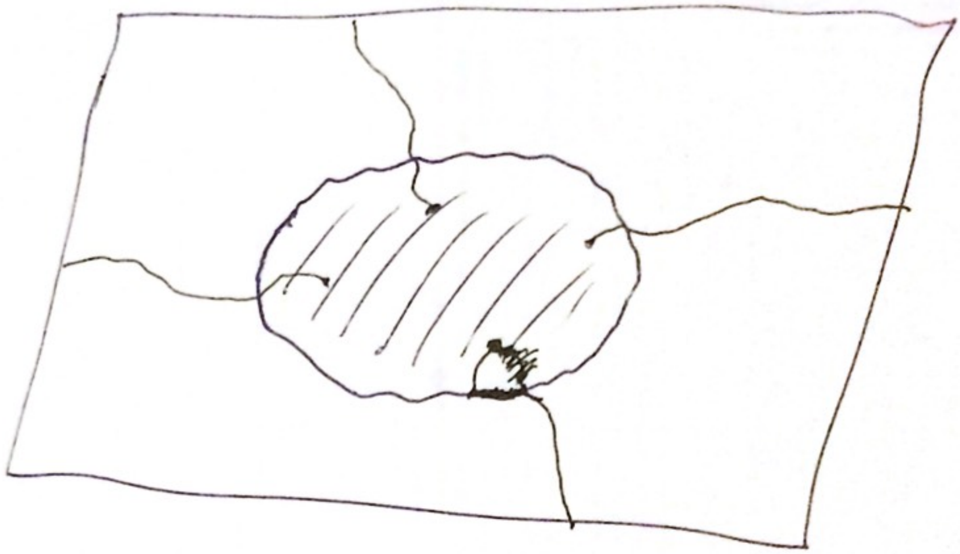
setze $\pi' := \pi\restriction_{N(\Gamma')}$. Dann ist (Γ', σ', π') eine

C-Wiedergabe von G.

$\checkmark$

$\square$

3.4 Flache Teilgraphen

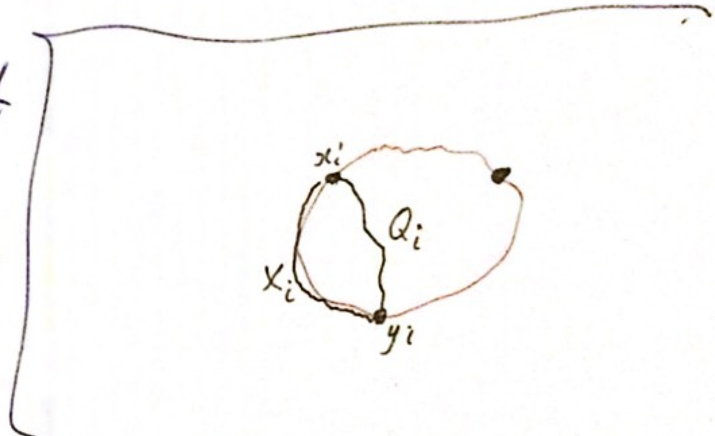


Lemma 3.4.1: Sei G ein Graph, sei C ein Kreis in G und sei (Γ, σ, π) eine C-Wiedergabe von G. Sei H ein Teilgraph von G und D ein Kreis in H, sodass $H \setminus D$ zusammenhängend ist. Seien $(P_i)_{i \leq 4}$ $((H \setminus D) - C)$-Wege in G, sodass $P_i \cap D$ ein (nicht-leerer) Teilweg von P_i ist. Dann gibt es eine Separation (A, B) von G, sodass:

1. $A \cap B \subseteq D$
2. $V(H) \subseteq B$
3. $V(C) \subseteq A$
4. Es gibt eine $(A \cap B)$-Wiedergabe von $G[B]$, wobei die zyklische Ordnung auf $A \cap B$ von D induziert wird.

__Beweis:__ Die P_i bezeugen, dass D in kein $\sigma(c)$ enthalten ist. Also ist D eine Vereinigung von $\pi[N(\Gamma)]$-Wegen $Q_1, \dots, Q_n$. Für $i \leq n$ gibt es $c_i \in \Gamma$ mit $Q_i \subseteq \sigma(c_i)$. Seien die Endecken von Q_i x_i und y_i und sei X_i ein $(x_i$-$y_i)$-Bogen in ∂c_i, der kein anderes Element von $N(\Gamma)$ enthält.

Sei $X := \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Also ist X topologisch ein Kreis. Sei Δ' die abgeschlossene Kreisscheibe in Δ mit Rand X.



Sei $A := \bigcup_{\substack{c \in \Gamma \\ c \not\subseteq \Delta'}} \sigma(c) \cup (\pi^{-1}(N(\Gamma)) \cap D)$

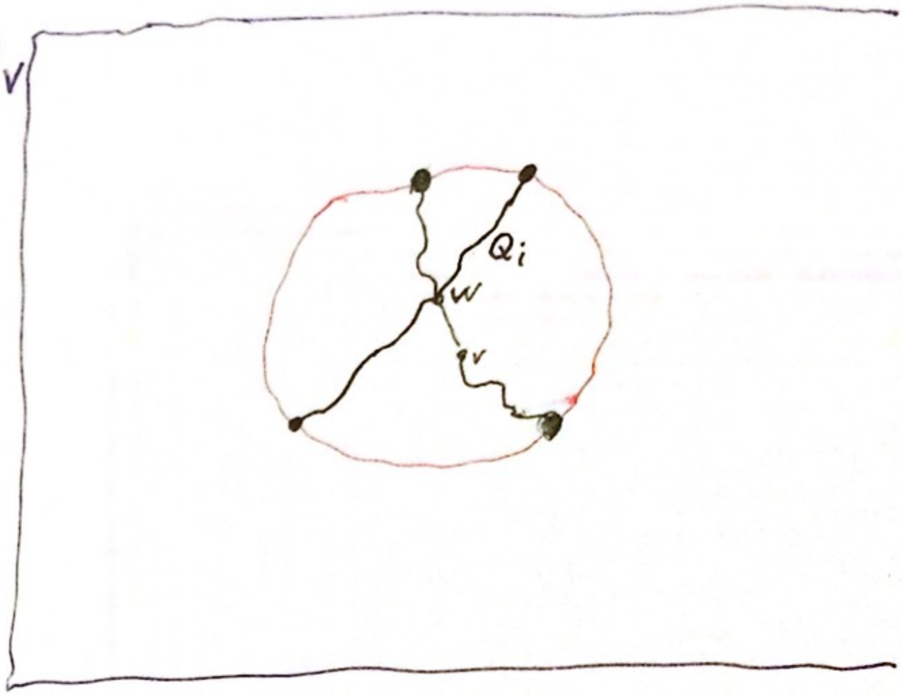
sei $B = \bigcup_{\substack{c \in \Gamma \\ c \subseteq \Delta'}} \sigma(c) \cup V(D)$.

(1) und (3) sind klar.

__Behauptung:__ Jedes P_i trifft $A \cap B$.

__Beweis:__ Sei w die Erste Ecke von P_i auf D und v der Vorgänger von w auf P_i.

Angenommen P_i trifft $A \cap B$ nicht. Sei $c \in \Gamma$ mit $v, w \in c$. $(H \setminus D) \cup P_i v$ ist zusammenhängend und liegt wegen der P_j in keinem $\sigma(c')$, also enthält es eine Ecke im ~~Rand von C~~

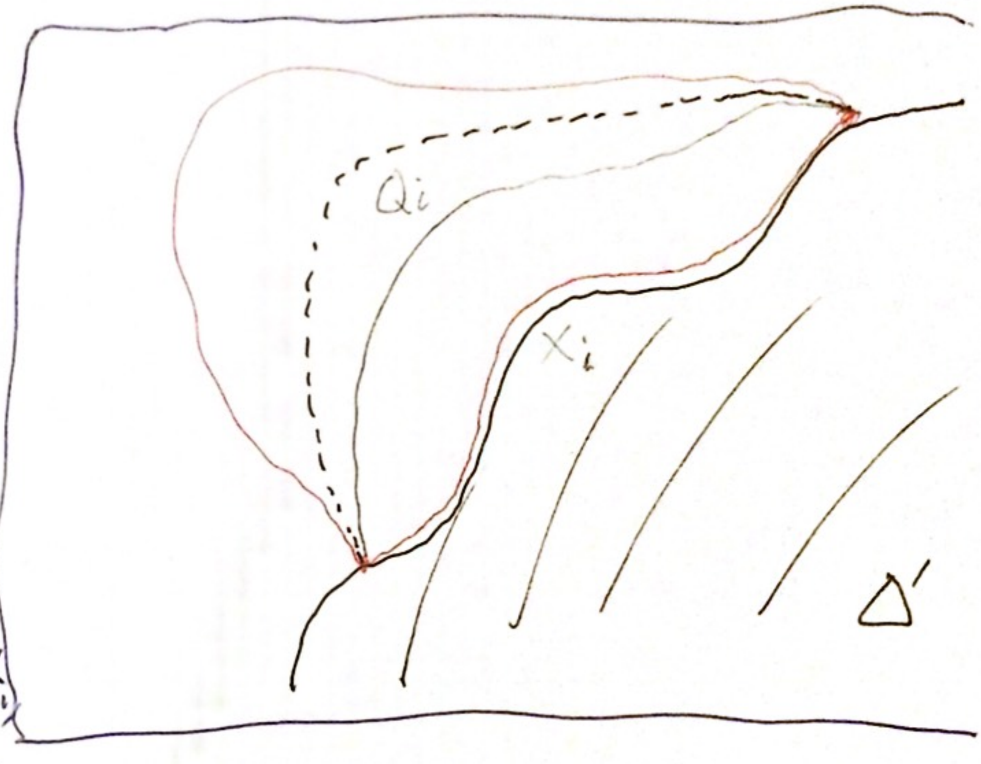


$\pi[\tilde{\tau}]$. Ein anderes Element liegt auf wP_i, und 2 weitere in D (und deshalb in $A \cap B$). Also gilt $|\pi[\tilde{\tau}]| \geq 4$. ⋕ ✓

Angenommen nun (2) gilt nicht. Also gilt $V(H \setminus D) \subseteq A$. Sei v_i die erste Ecke von P_i in $A \cap B$, x_i die Endecke in $H \setminus D$ und y_i die Endecke auf C. O.B.d.A. liegen die y_i in der zyklischen Reihenfolge y_1, y_2, y_3, y_4 auf C. Sei Q ein (x_2-x_4)-Weg in $H \setminus D$. Sei τ eine Kreisscheibe mit $\tau \subseteq \Delta'$ und $\partial \tau \cap \partial \Delta' = \{\pi(v_1), \pi(v_3)\}$.

Dann gibt es eine C-Wiedergabe (Γ', σ', π') von $\overline{G} = G[A] + v_1v_3$ mit $\Gamma' = \{c \in \Gamma : c \nsubseteq \Delta'\} \cup \{\bar{c}\}$, aber $y_1 P_1 v_1 v_3 P_3 y_3$ und $y_2 P_2 x_2 Q x_4 P_4 y_4$ bilden in $\overline{G}$ ein C-Kreuz. $\#$

Also gilt ②, und wir müssen nur noch ④ beweisen. Für $i \leq n$ mit $c_i \subseteq \Delta'$ sei $c_i' \nsubseteq c_i$ eine ~~Kre~~ abgeschlossene Kreisscheibe mit $\partial c_i' \cap \partial c_i = \partial c_i \cap X = X_i$



und sei Δ'' die ~~Kreis~~ abgeschlossene Kreisscheibe $\Delta' \cup \bigcup_{\substack{i \leq n \\ c_i \nsubseteq \Delta'}} c_i$. Dann gibt es eine ~~(A∩B)~~ $(A \cap B)$-Wiedergabe $(\Gamma'', \sigma'', \pi'')$ von $G[B]$ in Δ'' mit $\Gamma'' = \{c \in \Gamma : c \subseteq \Delta'\} \cup \{c_i' : i \leq n, c_i \nsubseteq \Delta'\}$

□