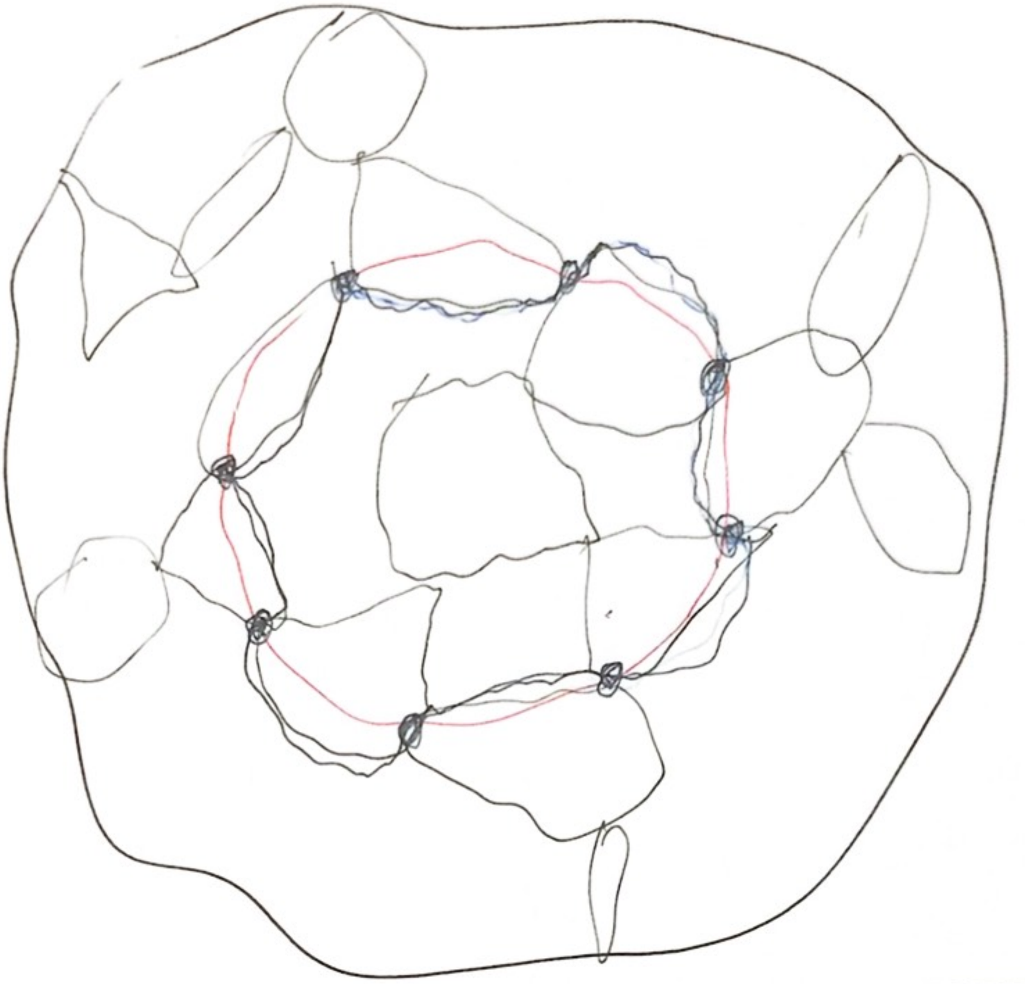
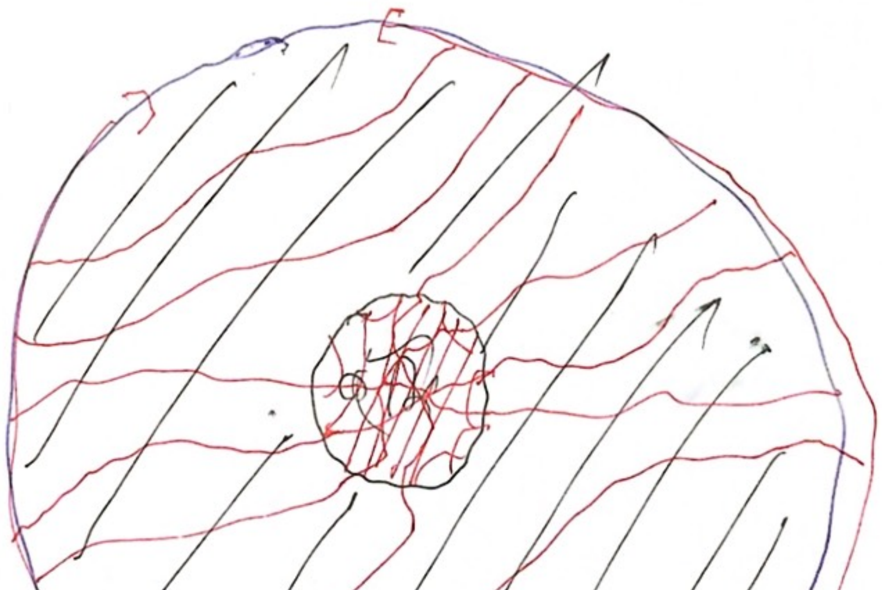
Kapitel 5: Gesellschaften und wirbelnden Wiedergaben

5.1 Schiefe Verbindungen

Definition 5.1.1: Eine *Gesellschaft* besteht aus einem Graphen G und eine zyklisch geordnete Menge Ω von Ecken von G. Für $A, B \subseteq \Omega$ disjunkte Intervalle ist eine $(A-B)$-*Verbindung* eine Menge von disjunkten Ω-Wegen, die Endecken sowohl in A als auch in B haben. ~~Die Tiefe von (G, Ω) ist~~ Eine *Verbindung* in (G, Ω) ist eine (A, B)-Verbindung für disjunkte Intervalle A und B. Die *Tiefe* von (G, Ω) ist die Größe einer maximalen Verbindung.

Für eine (A, B)-Verbindung $\mathcal{P}$, seien die Endecken der Wege aus $\mathcal{P}$ $a_1 \dots a_n$, in der Reihenfolge, wie sie in A liegen. Sei $P_i \in \mathcal{P}$ der Weg von a_i, und sei b_i die Endecke von P_i in B. Sei deren





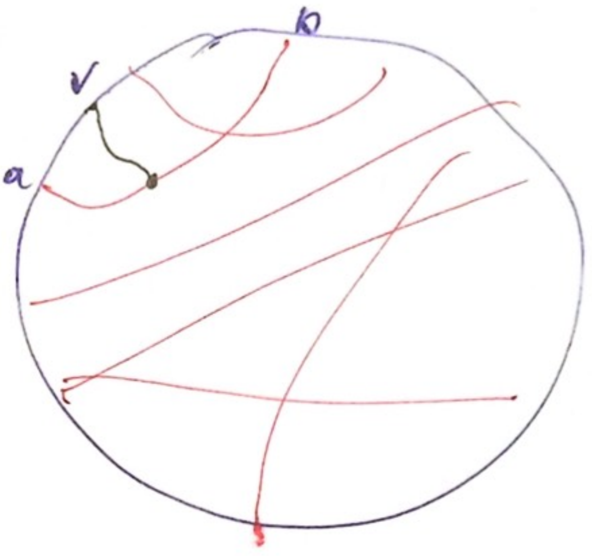
Reihenfolge in B $b_{\gamma(n)}, b_{\gamma(n-1)} \dots b_{\gamma(1)}$. Wir nennen $\gamma_{\mathcal{P}} := \gamma$ die <u>entsprechende Permutation</u> zu $\mathcal{P}$. Falls γ die Identität ist, so nennen wir $\mathcal{P}$ <u>planar</u>. Falls $\gamma(1) \neq 1$ und $\gamma(n) \neq n$, so heißt $\mathcal{P}$ <u>schief</u>. Ein Weg $P \in \mathcal{P}$ heißt <u>peripher</u> in $\mathcal{P}$ genau dann, wenn es ein Intervall von Ω gibt, die die Endecken von P aber keine weitere Endecken aus $\mathcal{P}$ enthält.

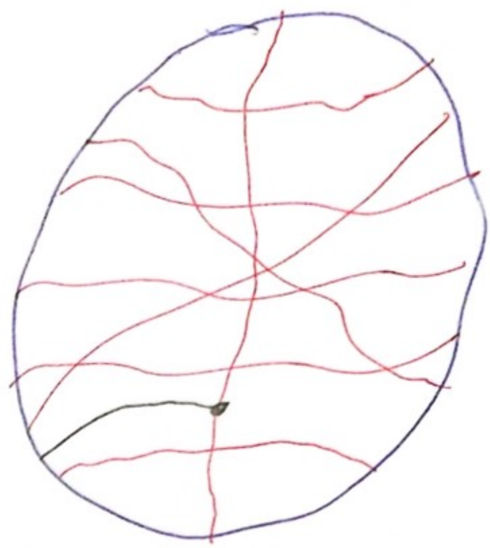
<u>Bemerkungen 5.1.2</u>: Eine Verbindung ist genau dann schief, wenn sie keinen Peripheren Weg enthält. Sei $P_i \in \mathcal{P}$ ein Weg mit $i \neq 1$, $\gamma(i) \neq 1$, $i \neq n$ und $\gamma(i) \neq n$. Dann ist auch $\mathcal{P} - P$ schief. Insbesondere gibt es in jeder Verbindung mit mehr als 5 Elementen einen Weg, den wir löschen können, ohne Schiefheit zu verlieren.

Lemma 5.1.3: Sei (G, Ω) eine Gesellschaft und seien $p, q \in \mathbb{N}_1$ mit $q \geq 2$. Sei $\mathcal{P}$ eine Verbindung von (G, Ω) der Größe $p+q-2$. Dann gibt es $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ die planar der Größe p oder schief der Größe q ist.

Beweis: Per Induktion nach $p+q-2$. Der Induktionsanfang $p+q-2 = 1$ ist klar.

Induktionsschritt: Falls $\mathcal{P}$ schief ist, so sind wir schon fertig. Falls nicht, so finden wir einen peripheren Weg P. Sei $\mathcal{P}' := \mathcal{P} - P$. Nach der IH gibt es in $\mathcal{P}'$ eine planare Verbindung der Größe $p-1$, die dann zusammen mit P eine planare Verbindung der Größe p bildet, oder eine schiefe Verbindung der Größe q. $\square$

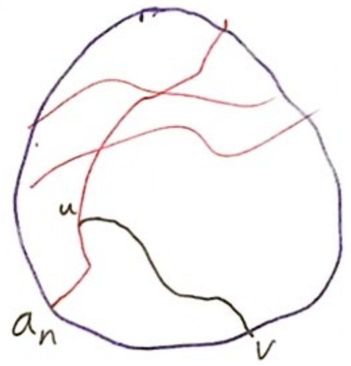




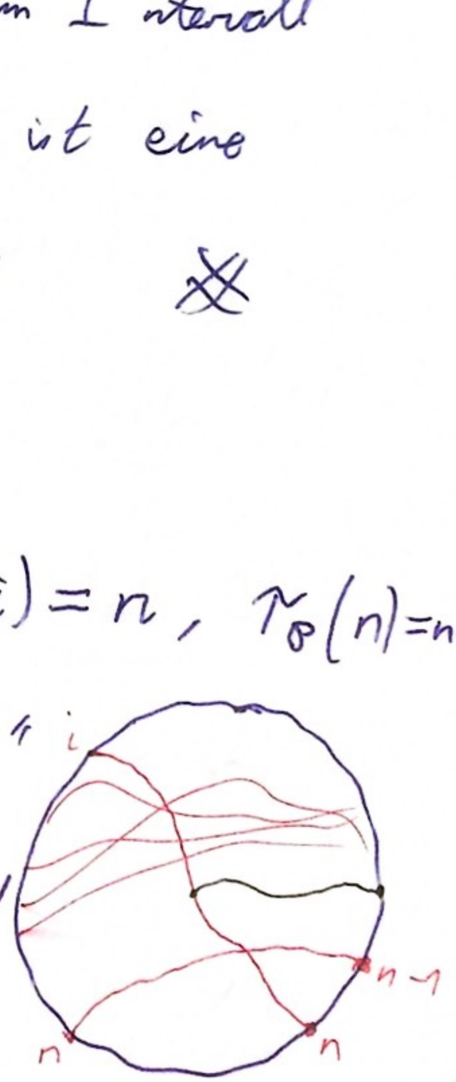
<u>Lemma 5.1.4</u>: Sei (G, Ω) eine Gesellschaft und sei $\mathcal{P}$ eine Verbindung in G. Sei Q ein $(\Omega - \cup \mathcal{P})$-Weg, sodass es keinen Teilweg R von dem von Q getroffenen Weg P gibt, für den $\mathcal{P} - \{P\} \cup \{Q \cup R\}$ eine schiefe Verbindung ist. Dann können wir bezeugende Intervalle A, B zu $\mathcal{P}$ so wählen, dass: $P = P_1$, $\tau_{\mathcal{P}}(1) = n$, $\tau_{\mathcal{P}}(2) = 1$, $\tau_{\mathcal{P}}(n) = n-1$ und die Endecke von R in Ω in B zwischen $b_{\sigma(1)}$ und $b_{\sigma(n-1)}$ liegt.

Beweis: Sei u die Endecke von R auf P, seien A, B bezeugende Intervalle zu $\mathcal{P}$, und sei $P = P_i$. Setze $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q \cup uPa_i\}$ und $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q \cup uPb_i\}$. Da $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \neq \mathcal{P}$ ist u keine Endecke von $\mathcal{P}$. O.B.d.A liegt die Endecke v von Q in Ω nicht in A. Also ist $\mathcal{P}'$ eine Verbindung. Da sie nicht schief ist gilt O.B.d.A. $\tau_{\mathcal{P}'}(n) = n$, wobei $n = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}'|$.

Fall 1: $i = n$. Dann liegt v im Intervall $[a_n, b_n]$ und $\mathcal{P}''$ ist eine schiefe Verbindung ↯



Fall 2: $i \neq n$. Dann gilt $\tau_{\mathcal{P}}(i) = n$, $\tau_{\mathcal{P}}(n) = n-1$ und $v \notin [a_n, b_{n-1}]$. Also ist auch $\mathcal{P}''$ eine Verbindung. Da $\tau_{\mathcal{P}''}(n) = n-1$ und $\mathcal{P}''$ nicht schief ist, gilt $\tau_{\mathcal{P}''}(1) = 1$



Also gilt $i=1$, $\tau_{\mathcal{P}}(2)=1$ und $v \notin [b_{\sigma(1)}, a_1]$. $\square$

<u>Lemma 5.1.5:</u> Sei (G,Ω) eine Gesellschaft und sei $\mathcal{P}$ eine schiefe Verbindung in $\mathcal{P}$. Seien Q, Q' disjunkte $(\bigcup\mathcal{P}-\Omega)$-Wege. Dann gibt es $P \in \mathcal{P}$ und Teilwege R, R' von P, sodass eine der Folgenden eine schiefe Verbindung ist:

(a) $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q \cup R\}$

(b) $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q' \cup R'\}$

(c) $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{Q \cup R, Q' \cup R'\}$.

<u>Beweis:</u> Seien v, v' die Endecken von Q, Q' in Ω und u, u' die Endecken in $\bigcup\mathcal{P}$. Nach Lemma 5.1.4 können wir bezeugende Intervalle A, B finden, sodass $\tau_{\mathcal{P}}(1)=n$, $\tau_{\mathcal{P}}(2)=1$, $\tau_{\mathcal{P}}(n)=n-1$, u liegt auf P_1 und v liegt in $[b_{\sigma(n-1)}, b_{\sigma(1)}]$. Nach Lemma 5.1.4 kreuzt der Weg aus $\mathcal{P}$, auf dem u' liegt, allen anderen, insbesondere P_2 und P_n

also ist dieser Weg P_1. O.B.d.A. liegt u zwischen a_1 und u' auf P_1. Sei $\mathcal{P}'$ die Verbindung $\mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{a_1 P_1 u Q, Q' u' P_1 b_1\}$. Dann gilt $\tau_{\mathcal{P}'}(2) = 1$ und $\tau_{\mathcal{P}'}(n) = n-1$ (falls $v' \in [a_2, a_n]$) oder $\tau_{\mathcal{P}'}(n-1) = n$ (falls $v' \in [b_{\sigma(n)}, b_{\sigma(2)}]$), also ist $\mathcal{P}'$ schief. $\square$