Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zu 'Graph Minors'
Blatt 6
Nathan Bowler

Die Aussage von Lemma 3.4.1 aus der Vorlesung lautet wie folgt:

Lemma 3.4.1. *Sei G ein Graph, sei C ein Kreis in G und sei (Γ, σ, π) eine C-Wiedergabe von G. Sei H ein Teilgraph von G und D ein Kreis in H, sodass $H \setminus D$ zusammenhängend ist. Seien $(P_i)_{i \leq 4}$ $((H \setminus D)$-$C)$-Wege in G, sodass $P_i \cap D$ ein (nicht-leerer) Teilweg von P_i ist. Dann gibt es eine Separation (A, B) von G, sodass:*

1. $A \cap B \subseteq D$
2. $V(H) \subseteq B$
3. $V(C) \subseteq A$
4. *Es gibt eine $(A \cap B)$-Wiedergabe von $G[B]$, wobei die zyklische Ordnung auf $A \cap B$ von D induziert wird.*

1. Gilt diese Aussage noch, wenn wir die Anzahl 4 von Wegen durch 3 ersetzen? Finde einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

2. Ich habe in der Vorlesung behauptet, dass man 'ein (nicht-leerer) Teilweg von P_i ist' durch '$\neq \emptyset$ ersetzen kann. Finde ein Gegenbeispiel zu dieser Behauptung. Wo im Beweis wird diese Eigenschaft der Wege benutzt? Muss noch etwas an dieser Stelle geflickt werden?

3. Zeige, dass es einen Algorithmus gibt, um in Polnomzeit in n zu entscheiden, ob es in einem Graphen G mit $\{s_1, s_2, t_1, t_2\} \subseteq V(G)$ und $|V(G)| = n$ disjunkte Wege P_1 von s_1 nach t_1 und P_2 von s_2 nach t_2 gibt. [Du kannst annehmen, dass es einen Algorithmus gibt, der in einem Graphen G mit n Ecken und mit zwei gegebenen Eckenmengen E und F in Polynomzeit in n entweder 4 disjunkte $(E - F)$-Wege in G oder eine ≤ 3-Separation (A, B) von G findet, mit $E \subseteq A$ und $F \subseteq B$.]

4. Die *elementare r-Mauer* ist der Graph, der aus dem $2r \times r$-Gitter entsteht, wenn man die Kanten mit Endecken $(2i-1, 2j-1)$ und $(2i-1, 2j)$ für $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ oder mit Endecken $(2i, 2j)$ und $(2i, 2j+1)$ für $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil$ löscht und danach die zwei entstehende Ecken von Grad 2 auch löscht. Eine *r-Mauer* ist eine Unterteilung eines elementaren r-Mauer.

   (a) Zeige, dass jede r-Mauer eine r-Masche ist (mit passenden Verzweigungsmengen).

   (b) Zeige, dass jede R-Masche mit $R >> r$ eine r-Mauer enthält.