Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

**Übungen zu 'Graph Minors'**
**Blatt 7**
Nathan Bowler

Auf diesem Blatt bauen die Aufgaben aufeinander auf; ihr könnt also bei späteren Aufgaben der Früheren voraussetzen.
Sei $G$ ein Graph und sei $M$ eine Masche in $G$. Ein *Quadrat* von $M$ ist ein Kreis in $M$, der nur 4 Verzweigungsmengen trifft. Für $a \in V(G)$ heißt $M$ *gut verbunden* an $a$ in $G$, falls es für jeden Quadrat $C$ von $M$ einen $(a-M)$-Weg in $G$ gibt, der $M$ in einer Ecke aus $C$ trifft.

1. (a) Sei $a$ eine Ecke eines Graphen $G$ und sei $M$ eine flache Masche in $G-a$, sodass jeder $(a-M)$-Weg der äußere Kreis von $M$ trifft. Zeige, dass $M$ auch in $G$ flach ist.

   (b) Sei $M$ eine flache Masche in einem Graphen $G$ und sei $M'$ eine Teilmasche, die vom äußeren Kreis disjunkt ist. Zeige, dass auch $M'$ flach ist.

   (c) Sei $M$ eine flache Masche in einem Graphen $G$. Zeige, dass jeder $M$-Weg in $G$ von $M$-Länge mehr als 2 beide Endecken im äußeren Kreis hat.

   (d) Sei $a$ eine Ecke eines Graphen $G$, und sei $M$ eine Masche in $G$, die an $a$ gut verbunden ist. Zeige, dass jede Teilmasche von $M$ auch an $a$ gut verbunden ist.

2. Sei $r \in \mathbb{N}$ und sei $R >> r$. Sei $a$ eine Ecke eines Graphen $G$ und sei $M$ eine flache $R$-Masche in $G-a$. Zeige, dass es eine $r$-Teilmasche von $M$ gibt, die in $G$ flach oder an $a$ gut verbunden ist.

3. Sei $s \in \mathbb{N}$ und sei $r >> s$. Sei $G$ ein Graph, sei $A \subseteq V(G)$ mit $|A| = s$, und sei $M$ eine flache $r$-Masche in $G \setminus A$, die für jedes $a \in A$ in $G \setminus (A-a)$ an $a$ gut verbunden ist. Zeige, dass $G$ einen $K^{s+4}$-Minor hat, der von $M$ gegriffen wird.

4. Zeige, dass man im Flachenmaschensatz $T = t - 5$ nehmen kann.