Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zu 'Graph Minors'
Blatt 8
Nathan Bowler

Auf diesem Blatt bauen die Aufgaben ab Aufgabe 2 wiedder aufeinander auf.
Die Permutation $\tau : i \mapsto n+1-i$ von $[n]$ heißt die *Umkehrung*. Die *Sprungpermutation* τ ist die, die 1 auf n schickt und jedes andere i auf $i-1$ schickt. Die *Doppelkreuzpermutation* ist die Permutation τ mit $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$, $\tau(n-1) = n$, $\tau(n) = n-1$ und $\tau(i) = i$ für $2 < i < n-2$.

1. Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl und sei $k >> n$. Zeige, dass jede schiefe Verbindung der Größe k eine schiefe Verbindung der Größe n enthält, für die man die bezeugende Intervalle so wählen kann, dass die entsprechende Permutation die Umkehrung, Sprungpermutation oder Doppelkreuzpermutation von $[n]$ ist.

2. Sie $(\Gamma, \sigma, \pi, c_0)$ eine zylindrische Wiedergabe einer Gesellschaft (G, Ω). Sei $(P_i : i \in I)$ eine Familie von disjunkten $(\Omega$-$\sigma(c))$-Wegen in G. Sei v_i die Endecke von P_i in $\sigma(c)$ und w_i die Endecke in Ω. Zeige, dass die zyklische Reihenfolge der v_i in $\pi^{-1}\tilde{c}$ gleich die zyklische Reihenfolge der w_i in Ω ist.

3. Sei $(\Gamma, \sigma, \pi, c_0)$ eine zylindrische Wiedergabe einer Gesellschaft (G, Ω) und sei $\mathcal{P} = \{P_i \colon i \leq k\}$ eine schiefe Verbindung von (G, Ω). Zeige, dass jedes P_i die Menge $\sigma(c_0)$ in mindestens zwei Ecken trifft. Sei H ein Teilgraph von $G - \sigma(c_0)$. Angenommen nun, $\mathcal{P}$ wurde so gewählt, dass $E(\bigcup \mathcal{P}) \setminus E(H)$ minimal ist. Für $i \leq k$ sei P_i' der minimale Teilweg von P_i, sodass $P_i' \cup H$ den Weg P_i als Teilgraph enthält. Zeige, dass es nicht $2k+2$ disjunkte $(\Omega$-$\bigcup_{i \leq k} P_i')$-Wege in H gibt.

4. Sei $(\Gamma, \sigma, \pi, c_0)$ eine zylindrische Wiedergabe einer Gesellschaft (G, Ω). Sei $(C_i)_{1 \leq i \leq 2k+2}$ eine Familie von disjunkten Kreisen in $G - \sigma(c_0)$, die Ω von $\sigma(c_0)$ trennen, und sodass C_j Ω von C_i trennt für $i \leq j$. Sei $\{Q_i \colon 1 \leq i \leq 2k+2\}$ eine Familie von disjunkten $(\Omega$-$C_1)$-Wegen in G. Sei K die Vereinigung aller C_{2k+2}-Brücken, die von $\sigma(c_0)$ disjunkt sind. Angenommen es gibt eine schiefe Verbindung der Größe k von (G, Ω). Zeige, dass es eine solche Verbindung gibt, die in K nur Kanten der Q_i benutzt.