Unendliche Matroidentheorie: Übungsblatt 1

1. Beweisen Sie, dass $U_{n,m}$ genau dann graphisch ist, wenn $n \leq 1$ oder $n \geq m-1$.

2. Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit folgender Eigenschaft:

   (C3) (Kreiselimination) Seien $C, C' \in \mathcal{C}$ und $x \in C \cap C'$ und $z \in C \setminus C'$. Dann gibt es ein $C'' \in \mathcal{C}$, sodass $z \in C'' \subseteq (C \cup C') - x$.

   Beweisen Sie, dass die Menge von minimalen nicht-leeren Elementen von $\mathcal{C}$ die Menge von Kreisen eines Matroiden ist.

3. Eine Funktion $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *ist die Rangfunktion eines Matroiden* M falls für alle $A \subseteq E$ der Wert $r(A)$ gleich der Größe einer maximalen unabhängigen Teilmenge von A ist.

   Beweisen Sie, dass eine Funktion $r\colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genau dann die Rangfunktion eines Matroiden M ist, wenn folgende Axiome gelten:

   (R1) $(\forall A \subseteq E) r(A) \leq |A|$

   (R2) $(\forall A \subseteq E, x \in E) r(A) \leq r(A+x) \leq r(A)+1$

   (R3) (Submodularität) $(\forall A, B \subseteq E) r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$

   Zeigen Sie dass, unter diesen umständen, die unabhängigen Mengen von M genau die Mengen $A \subseteq E$ mit $r(A) = |A|$ sind.

Als Erinnerung: Unabhängigkeitsaxiome

Eine Teilmenge $\mathcal{I}$ von $\mathcal{P}(E)$ ist genau dann die Menge von *unabhängigen Mengen eines endlichen Matroiden*, wenn folgende Axiome gelten:.

(I1) $\varnothing \in \mathcal{I}(M)$.

(I2) $\mathcal{I}(M)$ ist unter Teilmengenbildung abgeschlossen.

(I3) Zu $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(M)$ und $x \in I_1 \setminus I_2$ mit $I_2 + x \notin \mathcal{I}(M)$ gibt es stets ein $y \in I_2 \setminus I_1$, sodass $I_1 - x + y \in \mathcal{I}(M)$.

Kreisaxiome

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) Kein element von $\mathcal{C}$ ist Teilmenge eines Anderen.

(C3) (Kreiselimination) Seien $C, C' \in \mathcal{C}$ und $x \in C \cap C'$ und $z \in C \setminus C'$. Dann gibt es ein $C'' \in \mathcal{C}$, sodass $z \in C'' \subseteq (C \cup C') - x$.

Hinweis für Übung 3

Beweisen Sie zuerst, dass, falls $r(A) + 1 = r(A + x)$ für ein $x \notin A$, dann auch $r(B) + 1 = r(B + x)$ für alle $B \subseteq A$.