Unendliche Matroidentheorie: Übungsblatt 10

1. Sei G ein endlicher Graph und sei P eine Orientierung von den $(\leq k)$-Separationen von G, die die erste Tangle-Bedingung erfüllt:

   (T1) Es gibt keine 3 kleine Seiten A_1, A_2 und A_3 mit $G[A_1] \cup G[A_2] \cup G[A_3] = G$.

   Beweise, dass P auch die zweite Bedingung erfüllt:

   (T2) Für jede Menge X von $\leq k$ Ecken von G gibt es eine Komponente K von $G - X$ mit $K \cup X$ groß in $\{K \cup X, G - X\}$.

2. Sei G ein endlicher Graph und sei $\mathcal{N}$ eine geschachtelte (nested) Menge von $(\leq k)$-Separationen von G. Sei β ein $\mathcal{N}$-Block mit mindestens $k+1$ Elemente und sei K eine Komponente von $G - \beta$. Beweise, dass es $\{C, D\} \in \mathcal{N}$ gibt mit $K \subseteq C \setminus D$ und $\beta \subseteq D$. Gilt dieses auch für unendliche Graphen?

3. Sei $\mathcal{N}$ eine Menge von Separationen eines Graphen G. Sei X eine konsistente Teilmenge von $\{(A, B) | \{A, B\} \in \mathcal{N}\}$. Beweise, dass X sich zu einer konsistenten Orientierung von $\mathcal{N}$ erweitern lässt.

4.* Sei G ein Graph mit nur einem Ende und sei M ein zahmer Matroid auf $E(G)$, sodass jeder endliche Kreis von G ein Kreis von M ist und jeder Kreis von M ein Kreis oder Doppelstrahl in G ist. Beweise, dass M der endliche-Kreis Matroid oder der topologische-Kreis Matroid von G ist.

Hinweise

Für Übung 4: benutze $(C3)_{\leq}$.