Unendliche Matroidentheorie: Übungsblatt 2

1. Sei M ein Matroid, sei $X \subseteq E(M)$, und sei $\mathcal{C}(X) = \{C \setminus X | X \in \mathcal{C}(M)\}$. Zeige, dass $\mathcal{C}(X)$ das Axiom (C3) erfüllt. Aus dem letzten Blatt wissen wir also, dass die minimalen nicht-leeren Elemente von $\mathcal{C}(X)$ die Kreise von einem Matroiden auf $E(M) \setminus X$ bilden. Welchem?

2. Sei M ein Matroid, und sei r die Rangfunktion von M. Wir definieren $r^* \colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ durch $r^*(X) := |X| - r(E) + r(E \setminus X)$. Zeige direkt, dass r^* die Rangaxiome erfüllt. Beweise danach, dass r^* die Rangfunktion des Dualen M^* von M ist.

3. Sei $E = E_1 \dot\cup E_2$ eine Bipartition der Grundmenge E eines Matroiden. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $M/E_1 = M \backslash E_1$

   (b) $M/E_2 = M \backslash E_2$

   Seien nun Matroiden M_1 und M_2 gegeben mit disjunkten Grundmengen E_1 und E_2. Zeige, dass es einen eindeutigen Matroiden M auf der disjunkten Vereinigung $E_1 \sqcup E_2$ gibt, sodass $M_1 = M/E_2 = M \backslash E_2$ und $M_2 = M/E_1 = M \backslash E_1$ gilt.

4* Seien B_1 und B_2 Basen eines Matroiden M, und sei $x \in B_1$. Zeige, dass es $y \in B_2$ gibt, sodass sowohl $B_1 - x + y$ als auch $B_2 - y + x$ eine Basis von M ist.

Hinweis

Übung 5: Betrachte Fundamentalkreise und Fundamentalkokreise.