# Unendliche Matroidentheorie: Übungsblatt 8

1. Beweise, dass die Klasse von Flickwerkmatroiden unter Minoren und Dualität abgeschlossen ist, dass jeder Flickwerkmatroid endlichen Rang hat, endlichen Korang hat oder wild ist, und dass für jeden Flickwerkmatroid $M$ auf $E$ die Menge $\{[B]_\sim \,|B \in \mathcal{B}(M)\}$ eine dichte Antikette in $\mathcal{L}_E$ ist.

2. Sei $A \subseteq B \subseteq E$ mit $|B \setminus A| = 1$ und mit $A$ und $E \setminus A$ unendlich. Sei $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $[B]_\sim$, sodass keine Menge $A' \approx A$ in mehr als ein $S \in \mathcal{S}$ enthalten ist. Sei $\mathcal{B}$ die Menge von $B' \approx B$, die in kein Element von $\mathcal{S}$ enthalten sind. Beweise, dass $\mathcal{B}$ ein Flicken (patch) auf $[B]_\sim$ ist.

3. Sei $G$ ein bipartiter Graph mit Seiten $A$ und $B$, und habe $G$ die Eigenschaft, dass jedes Element von $A$ mit allen außer endlich vielen Elementen von $B$ benachbart ist und jedes Element von $B$ mit allen außer endlich vielen Elementen von $A$ benachbart ist. Sei $\mathcal{B}$ die Menge von Mengen der Form $(B \setminus V(M)) \cup (A \cap V(M))$, wobei $M$ eine endliche Paarung in $G$ ist. Beweise, dass $\mathcal{B}$ ein Flicken auf $[B]_\sim$ ist.

4. (Zusatzaufgabe) Finde weitere Beispiele von Flicken, mit dem man einen Weihnachtsflickwerkmatroid schmücken könnte.

5.* Sei $G$ ein Graph mit nur einem Ende und sei $M$ ein zahmer Matroid auf $E(G)$, sodass jeder endliche Kreis von $G$ ein Kreis von $M$ ist und jeder Kreis von $M$ ein Kreis oder Doppelstrahl in $G$ ist. Beweise, dass $M$ der endliche-Kreis Matroid oder der topologische-Kreis Matroid von $G$ ist. Gilt diese Aussage auch, wenn $M$ wild sein darf?

6.** Sei $M$ ein twinned Pair von Matroiden und sei $N$ ein Matroid mit $N^{\text{fin}} = M_f$ und $N^{\text{cofin}} = M_c$. Muss jeder Kreis von $N$ ein Kreis von $M_c$ sein?

7.** Sei $E$ eine (nicht notwendigerweise abzählbare) Menge und seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Mengen von Teilmengen von $E$, die (O1), (O2) und (OT) erfüllen. Muss $\langle \mathcal{C} \rangle$ eine Basis besitzen?

8.** Gibt es überhaupt einen uniformen Matroiden, der weder endlichen Rang noch endlichen Korang hat? Das heißt, kann man dieses aus den normalen Axiomen der Mengenlehre ohne Zusatzannahmen beweisen?