C*-Algebren in der Theorie dynamischer Systeme

von

Philipp Wruck

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Untersuchung topologischer dynamischer Systeme ist man vor allem am asymptotischen Verhalten des Systems interessiert, also an den Äquivalenzrelationen

$$\begin{aligned} x \sim_s y &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \\ x \sim_u y &\Leftrightarrow \lim_{n\to-\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \\ x \sim_a y &\Leftrightarrow x \sim_s y \text{ und } x \sim_u y \end{aligned}$$

In dieser Allgemeinheit ist eine genaue Untersuchung dieser Relationen kaum sinnvoll. Jedoch kann man hier das Grundprinzip der algebraischen Topologie anwenden, komplizierte topologische Informationen gewisser Objekte in algebraischen Objekten zu codieren und dabei den Komplexitätsgrad zu verringern. Das Hilfsmittel, was in diesem Falle benötigt wird, sind C*-Algebren. Dies sind Objekte, welche in der Schnittstelle von Topologie, Analysis und Algebra liegen und deren Theorie in den letzten Jahrzehnten immer mehr an Bedeutung gewonnen hat. Wir beginnen daher mit einem grundlegenden Kapitel über die Theorie von C*-Algebren, ehe die angesprochene Codierung dynamischer Systeme näher betrachtet und das Verfahren am Beispiel topologischer Markovketten erläutert werden soll.

1 C^*-Algebren

Eine Banachalgebra ist ein komplexer Banachraum A zusammen mit einer Multiplikation $\mu : A \times A \to A$, geschrieben $\mu(a,b) = ab$, so daß $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ gilt für alle $a, b \in A$. Eine Involution $^* : A \to A$ auf einer beliebigen Algebra ist eine antilineare Abbildung mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$(a^*)^* = a$$

$$(ab)^* = b^* a^*.$$

Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra mit Involution, in der die C^*-Gleichung

$$\|x^* x\| = \|x\|^2$$

gilt. Diese harmlos anmutende Gleichung ist von fundamentaler Bedeutung für die Theorie und unterscheidet C^*-Algebren signifikant von allgemeineren Banachalgebren. Wie einschränkend die C^*-Gleichung ist, sehen wir in den nächsten Beispielen und Sätzen. Zunächst jedoch der geeignete Morphismusbegriff für C^*-Algebren.

Definition 1.1 Es seien A, B C^*-Algebren. Ein Algebrenhomomorphismus $\varphi : A \to B$ heißt *-Homo-morphismus, wenn er die Involution respektiert, d.h. wenn gilt $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ für alle $x \in A$. C^*-Algebren und *-Morphismen bilden die Kategorie der C^*-Algebren. *-Morphismen sind automatisch normverringernd, $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$, und daher stetig.

Beispiel 1.2

1. $\mathbb{C}$ mit der komplexen Konjugation ist offensichtlich eine C^*-Algebra.

2. Es sei H ein komplexer Hilbertraum, $B(H)$ die Algebra (mit Komposition) der beschränkten linearen Operatoren. $B(H)$ mit der Adjunktion * als Involution ist eine C^*-Algebra.

3. Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, $C_0(X)$ die Algebra der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, welche im Unendlichen verschwinden, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Kompaktum $K \subseteq X$, so daß $f\big|_{X\setminus K}$ betragsmäßig kleiner als ε ist. Mit der Involution $f^*(x) = \overline{f(x)}$ ist $C_0(X)$ eine kommutative C^*-Algebra.

4. Ist A eine C^*-Algebra, so ist $M_n(A)$, die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in A, auf kanonische Weise eine C^*-Algebra.

5. Es sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe, λ das Haarmaß auf X. Auf der Menge der stetigen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ definiere ein Faltungsprodukt durch

$$f * g(x) = \int_G f(y) \cdot g(xy^{-1})\, d\lambda(y)$$

   und eine Involution durch $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Die Menge $L^1(G)$ der integrierbaren Funktionen wird mit diesen Operationen zu einer *-Algebra. Eine Darstellung von $L^1(G)$ ist ein *-Homomorphismus $\pi : L^1(G) \to B(H)$, welcher stetig ist in der schwachen Operatortopologie. Eine Darstellung heißt beschränkt, falls $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$ für alle $f \in L^1(G)$. Definiere

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi \text{ ist beschränkte Darstellung von } L^1(G)\}.$$

   Diese Norm auf $L^1(G)$ erfüllt die C^*-Gleichung und die Vervollständigung unter dieser Norm ist eine C^*-Algebra, bezeichnet mit $C^*(G)$, die Gruppen-C^*-Algebra.

Um zu veranschaulichen, was es bedeutet, topologische Eigenschaften mittels C^*-Algebren zu codieren, wollen wir den klassischen Satz von Gelfand-Naimark angeben.

Theorem 1.3 (Gelfand-Naimark, kommutative Version): *Jede kommutative C^*-Algebra A ist *-isomorph zu einer C^*-Algebra der Form $C_0(X)$ für X lokalkompakt Hausdorff. Ist A unital, so ist X kompakt.*

Bemerkung 1.4 Wir werden den Satz hier nicht beweisen, jedoch sind ein paar Bemerkungen angebracht.

1. Der Raum X ergibt sich aus den maximalen Idealen der Algebra A mit einer geeigneten Topologie. Noch einfacher ist jedoch das folgende Bild im unitalen Fall: Betrachte die Menge der unitalen *-Homomorphismen $\varphi : A \to \mathbb{C}$. Es ist $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$, also ist dies eine Teilmenge der Einheitskugel in A^*, dem Dualraum von A. Man kann zeigen, daß sie sogar schwach*-abgeschlossen ist und somit schwach*-kompakt. Dies ist der Raum X, genannt das Spektrum von A. In der Tat ist das Spektrum der von einem normalen Element $a \in A$ erzeugten (also kommutativen) C^*-Algebra $C^*(a)$ gerade das klassische Spektrum von a:

$$\mathrm{Sp}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda \cdot \mathbb{1} \text{ nicht invertierbar }\}.$$

2. Man kann genauer den Funktor

$$C : \{\text{kompakte Hausdorffräume}\} \to \{\text{kommutative unitale } C^*\text{-Algebren}\}$$

betrachten, welcher einem Raum X die stetigen Funktionen nach $\mathbb{C}$ zuordnet und einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ die Abbildung $Cf : C(Y) \to C(X)$ mit $Cf(h) = h \circ f$. Der Satz von Gelfand-Naimark besagt, daß dies eine Äquivalenz von Kategorien ist (genauer müßte man die Opposite-Kategorie der C^*-Algebren betrachten, da C kontravariant ist).

3. Bemerkung 2. gilt auch für lokalkompakte Hausdorffräume und den Funktor C_0, falls man die Morphismen geeignet einschränkt.

Insbesondere besagt Bemerkung 2., daß zwei kompakte Hausdorffräume genau dann homöomorph sind, wenn die Algebren der stetigen Funktionen isomorph sind. Man hat also die topologischen Informationen vollständig in der C^*-Algebra $C(X)$ codiert. Tatsächlich nennt man die Theorie der C^*-Algebren auch 'nichtkommutative Topologie' bzw. 'nichtkommutative Geometrie', weil man Eigenschaften von Räumen auf kommutative C^*-Algebren überträgt und diese Konstruktionen dann auf allgemeinen C^*-Algebren imitiert. Zur Motivation zitieren wir noch die nichtkommutative Version des Satzes von Gelfand-Naimark.

Theorem 1.5 (Gelfand-Naimark, nichtkommutative Version): *Jede C^*-Algebra ist *-isomorph zu einer abgeschlossenen Unteralgebra von $B(H)$ für einen geeigneten Hilbertraum H.*

Aus physikalischer Sicht sind C^*-Algebren also einfach Algebren von Observablen. Der Übergang von topologischen Räumen zu C^*-Algebren wird dann auch als Quantisierung bezeichnet. Nichtkommutative Topologie spielt in der modernen Quantenfeldtheorie eine zunehmend wichtige Rolle.

2 Die C^*-Algebra einer Äquivalenzrelation

Wir wollen nun die Informationen, welche in einer topologischen Äquivalenzrelation enthalten sind, in einer C^*-Algebra codieren. Grob gesagt betrachten wir eine Faltungsalgebra der stetigen Funktionen auf der Äquivalenzrelation. Die konkrete Konstruktion ist etwas kompliziert, wir skizzieren sie hier nur. Sei dazu X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir können dies als Teilmenge von $X \times X$ auffassen, für die gewisse Restriktionen gelten. Sei also $G \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Komposition auf G, jedoch nur für bestimmte Elemente: Zwei Elemente $(x, y), (x', y') \in G$ heißen verknüpfbar, falls $y = x'$ gilt. In dem Fall setze $(x, y) \circ (y, y') = (x, y')$. Die Transitivität der Äquivalenzrelation zeigt, daß das erhaltene Element in G liegt. Es sei nun eine Topologie auf G gegeben (nicht notwendig die Teilraumtopologie von $X \times X$), in der G lokalkompakt ist. Definiere weiter

$$^{-1} : G \to G, \quad (x, y)^{-1} = (y, x)$$

$$d : G \to G, \quad d(x,y) = (y,y)$$
$$r : G \to G, \quad r(x,y) = (x,x)$$
und die Mengen $G^x = r^{-1}(x,x) = \{(z,y) \in G \mid z = x\}$ sowie $G^0 = \{(x,x) \in G\}$. Als Menge ist G^0 die Diagonale des Raumes X, jedoch kann die Topologie unterschiedlich sein. Für jedes $x \in X$ sei λ^x ein Maß auf der Borel-σ-Algebra. Ein solches System $\{\lambda^x \mid x \in X, \lambda^x \text{ Maß auf } \mathcal{B}(G)\}$ heißt Haarsystem für G, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) Der Träger des Maßes λ^x ist G^x.

(ii) Für $f \in C_c(G)$ ist die Funktion $\varphi_f : G^0 \to \mathbb{C}, \quad (x,x) \mapsto \int_G f(z,y)\, d\lambda^x$ stetig.

(iii) Für jedes $(x,y) \in G$ und $f \in C_c(G)$ ist
$$\int_G f((x,y) \circ (z,w))\, d\lambda^y(z,w) = \int_G f(z,w) d\lambda^x(z,w).$$

Definiere dann für zwei Funktionen $f, g \in C_c(G)$ das Produkt
$$f * g(x,y) = \int_G f((x,y) \circ (z,w)) g((z,w)^{-1})\, d\lambda^y(z,w).$$
Da der Träger von λ^y gerade G^y ist und f, g kompakten Träger haben, ist das auftretende Produkt wohldefiniert, genauer kann man schreiben
$$f * g(x,y) = \int_{G^y} f(x,w) g(w,y)\, d\lambda^y(w).$$
Im Falle einer endlichen Äquivalenzrelation implizieren die Bedingungen, daß es sich einfach um das Zählmaß handelt.

Um eine C^*-Algebra zu erhalten, fehlen uns eine Involution und eine geeignete Norm auf $C_c(G)$. Als Involution definieren wir:
$$f^*(x,y) = \overline{f(y,x)}.$$
Wir kommen zur Konstruktion der Norm. Diese verläuft analog zur Konstruktion der Norm auf der Gruppen-C^*-Algebra und ist ein Beispiel für ein weit allgemeineres Prinzip, worauf wir aber nicht näher eingehen. Es sei λ_x das Bildmaß von λ^x bzgl. der Abbildung $(x,y) \mapsto (y,x)$. Definiere
$$\|f\|_{I,r} = \sup_{x \in X} \int_G |f|\; d\lambda^x, \quad \|f\|_{I,d} = \sup_{x \in X} \int_G |f|\; d\lambda_x, \quad \|f\|_I = \max\{\|f\|_{I,r}, \|f\|_{I,d}\}.$$
Man sieht leicht, daß $\|\cdot\|_I$ eine Algebrennorm auf $C_c(G)$ ist, welche die Involution respektiert. Jedoch erfüllt sie i.A. nicht die C^*-Bedingung. Hierzu benötigt man noch die folgende Konstruktion. Eine Darstellung von $C_c(G)$ ist ein *-Homomorphismus $\pi : C_c(G) \to B(H)$ in die

beschränkten Operatoren über einem Hilbertraum, welcher stetig ist, wenn $C_c(G)$ die Topologie als induktiver Limes über die Subalgebren $C(K)$, $K \subseteq G$ kompakt, trägt und $B(H)$ die schwache Operatortopologie. Ferner fordern wir, daß $\{\pi(f)\xi \mid f \in C_c(G), \xi \in H\}$ dicht in H ist. Dies ist nur eine technische Einschränkung, da jede Darstellung auf einem Hilbertraum H eine Darstellung auf einem Hilbertraum H' induziert, welche die Bedingung erfüllt. Eine Darstellung heißt beschränkt, falls $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_I$ gilt für alle $f \in C_c(G)$. Die Norm ist hierbei die übliche Operatornorm auf $B(H)$. Man definiert nun:

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi \text{ ist beschränkte Darstellung von } C_c(G)\}.$$

Diese Norm erfüllt die C^*-Bedingung und die Vervollständigung von $C_c(G)$ bzgl. dieser Norm ist daher eine C^*-Algebra, welche wir mit $C^*(G)$ bezeichnen und als die C^*-Algebra der Äquivalenzrelation G bezeichnen.

3 Topologische Markovketten

Die Konstruktion aus dem letzten Kapitel soll nun dazu dienen, einem hyperbolischen dynamischen System $f : X \to X$, f Homöomorphismus, drei C^*-Algebren zuzuordnen, welche den Äquivalenzrelationen stabiler, instabiler und asymptotischer Äquivalenz entsprechen. Die natürlichen Fragen, die sich dann stellen, wären z.B. inwieweit ein dynamisches System durch diese C^*-Algebren charakterisiert ist. Ferner kann man die Struktur dieser C^*-Algebren näher untersuchen und so evtl. Rückschlüsse auf das dynamische System erhalten. Wir werden die Konstruktion am Beispiel von topologischen Markovketten durchführen und dabei die Formulierungen so halten, daß sich der allgemeine Fall ohne Schwierigkeiten ableiten läßt. Zunächst ein kleiner Überblick über topologische Markovketten.

Es sei A eine $N \times N$-Matrix mit Einträgen 0 oder 1. Betrachte die Menge

$$\Omega_A = \{x \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} \mid a_{x_i x_{i+1}} = 1\}.$$

Dies sind also alle beidseitig unendlichen Folgen von Zahlen in $\{1, \dots, N\}$, wobei die Matrix A bestimmt, welche Folgezahlen zulässig sind. Wir versehen Ω_A mit der Teilraumtopologie von $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$, welches die Produkttopologie trage, $\{1, \dots, N\}$ die diskrete Topologie. Auf Ω_A betrachten wir den Shift

$$\sigma : \Omega_A \to \Omega_A, \quad \sigma(x)_i = x_{i-1}.$$

Dies ist offenbar ein Homöomorphismus. Beachte, daß die Topologie auf Ω_A metrisch ist, etwa erzeugt durch die Metrik

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} N^{-|i|} \cdot |x_i - y_i|.$$

Für ein $x \in \Omega_A$ definiere die folgenden stabilen und instabilen Mengen:

$$V^s(x) = \{y \in \Omega_A \mid d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}\} = \{y \in \Omega_A \mid x_i = y_i \; \forall i \leq 0\}$$

$$V^u(x) = \{y \in \Omega_A \mid d(\sigma^{-n}(x), \sigma^{-n}(y) < 1\, \forall n \in \mathbb{N}\} = \{y \in \Omega_A \mid x_i = y_i \;\forall i \geq 0\}$$

Diese zeichnen sich durch folgende Eigenschaft aus: Ist $x \in \Omega_A$, so gibt es eine Umgebung von x, welche homöomorph ist zu $V^s(x) \times V^u(x)$, genauer ist

$$V^s(x) \times V^u(x) \cong \{y \in \Omega_A \mid y_0 = x_0\}$$

durch den Homöomorphismus $(y, z) \mapsto (z_-, x_0, y_+)$, wobei z_- bzw. y_+ die negativen bzw. positiven Einträge der jeweiligen Elemente bezeichne.

Diese Eigenschaften führen in einem Abstraktionsprozeß auf den Begriff des Smale-Raums. Dies ist grob gesagt ein kompakter metrischer Raum X und ein Homöomorphismus $f : X \to X$, so daß es um jeden Punkt eine Umgebung gibt, die homöomorph ist zum Produkt der 'stabilen' und 'instabilen' Koordinaten des Punktes. Dies sind Mengen $V^s(x)$, $V^u(x)$, deren Schnitt $\{x\}$ ist und $f\big|_{V^s(x)}$ bzw. $f^{1-}\big|_{V^u(x)}$ ist kontrahierend. Die Existenz dieser lokalen Produktstruktur, die für topologische Markovketten sofort gegeben ist, wird also nun axiomatisch gefordert. Alle weiteren Betrachtungen über topologische Markovketten und deren C^*-Algebra können genauso für Smale-Räume durchgeführt werden. Um diesen Blickwinkel beizubehalten, sind vielleicht einige Schreibweisen im Folgenden komplizierter, als es alleine für Markovketten nötig wäre.

Wir wollen nun die durch positive bzw. negative Asymptotik gegebene Äquivalenzrelation topologisieren. Dazu setzen wir

$$G_0^s = \{(x, y) \in \Omega_A \times \Omega_A \mid y \in V^s(x)\}$$

und induktiv

$$G_n^s = \sigma^{-n}(G_0^s) = \{(x, y) \in \Omega_A \times \Omega_A \mid x_i = y_i \;\forall i \leq -n\}.$$

Analog definieren wir G_n^u und daraus $G_n^a = G_n^s \cap G_n^u$. Die Äquivalenzrelationen als Mengen sind dann einfach

$$G^s = \bigcup_{n \geq 0} G_n^s = \{(x, y) \in \Omega_A \times \Omega_A \mid \exists n \in \mathbb{N} : x_i = y_i \;\forall i \leq -n\}$$

$$G^u = \bigcup_{n \geq 0} G_n^u = \{(x, y) \in \Omega_A \times \Omega_A \mid \exists n \in \mathbb{N} : x_i = y_i \;\forall i \geq n\}$$

$$G^a = \bigcup_{n \geq 0} G_n^a = \{(x, y) \in \Omega_A \times \Omega_A \mid \exists n \in \mathbb{N} : x_i = y_i \;\forall i : |i| \geq n\}.$$

Wir versehen diese mit der induktiven Limes-Topologie. Im konkreten Fall der topologischen Markovketten ist dies auf G^a einfach die diskrete Topologie, im allgemeineren Fall jedoch nicht zwangsläufig. Ist dies aber der Fall, so ist eine stetige Funktion von G^a nach $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger einfach eine solche mit endlichem Träger und das im vorigen Abschnitt definierte Haarmaß ist das Zählmaß. Die Algebra $C_c(G^a)$ wird also mit folgendem Produkt versehen:

$$f * g(x,y) = \int_{G^a} f((x,y)(v,w)) \cdot g(w,v)\, d\lambda^y(v,w) = \sum_{z \sim_a x} f(x,z) \cdot g(z,y).$$

Im Gegensatz zu der Standard-C^*-Algebra $C_0(G)$ mit kanonischem Produkt und Supremumsnorm, welche die topologischen Informationen des Raumes G codierte, spiegelt das Produkt nun die Dynamik des Systems wieder. Die Norm besitzt keine einfachere Darstellung als die in ihrer Definition. Die Vervollständigungen der Algebren $C_c(G^s)$, $C_c(G^u)$, $C_c(G^a)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$,$\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$.

4 Resultate und Ausblicke

Noch wissen wir nichts weiter über die C^*-Algebra einer topologischen Markovkette oder allgemein eines Smale-Raumes, als daß sie existieren. Nähere Untersuchungen, die konkrete Verbindungen zur Dynamik herstellen, sind im Rahmen dieses Überblicks bei Weitem zu zeitintensiv, daher wollen wir uns auf die Angabe einiger wichtiger Resultate beschränken.

Ausblick 1 Als Erstes stellen wir fest, daß der Shift σ Abbildungen auf den C^*-Algebren induziert, und zwar wie folgt:

$$\alpha_a(f) = f \circ (\sigma^{-1} \times \sigma^{-1}) \text{ für } f \in C_c(G_a)$$

$$\alpha_s(f) = \lambda \cdot f \circ (\sigma^{-1} \times \sigma^{-1}) \text{ für } f \in C_c(G_s)$$
$$\alpha_u(f) = \lambda^{-1} f \circ (\sigma^{-1} \times \sigma^{-1}) \text{ für } f \in C_c(G_u).$$

Dabei ist $\log(\lambda)$ die topologische Entropie des Shifts (also λ der Spektralradius von A). Der Korrekturterm wird benötigt, damit $\alpha_{s,u}$ tatsächlich *-Automorphismen werden. Ein solcher *-Automorphismus induziert ein sogenanntes C^*-dynamisches System, womit einfach die diskrete Zeitentwicklung des Automorphismus gemeint ist. Diese C^*-dynamischen Systeme besitzen einige interessante Eigenschaften, so ist z.B. α_a asymptotisch kommutativ.

Ausblick 2 Die C^*-Algebren eines dynamischen Systems sind natürlich topologische Invarianten. Für topologische Markovketten kann man sie in Beziehung zu bereits bekannten Invarianten setzen. Die sogenannte Bowen-Franks-Invariante einer durch A definierten topologischen Markovkette ist die Gruppe $\mathbb{Z}^N/_{(\mathbb{1} - A)\mathbb{Z}^N}$. Sie ist eine topologische Invariante des Systems. In der Tat gewinnt man diese Invariante auch aus der asymptotischen C^*-Algebra. Hierzu ein wenig C^*-Algebrentheorie.

Eine Erweiterung einer C^*-Algebra A um C ist eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Die Erweiterung heißt trivial, falls sie splittet, d.h. falls ein $\gamma : C \to B$ existiert mit $\beta\circ\gamma = \mathbb{1}_B$. Ein starker Isomorphismus von Erweiterungen B, $\tilde{B}$ ist ein Isomorphismus $\varphi : B \to \tilde{B}$, so daß

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\
 & & \tilde{B} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Es sei $\mathbb{K} = K(H)$ die Menge der kompakten Operatoren auf einem separablen, unendlichdimensionalen Hilbertraum. Betrachte nun speziell die Erweiterungen

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Man kann zeigen, daß eine Erweiterung bis auf starke Isomorphie eindeutig bestimmt ist durch einen *-Morphismus

$$\tau : C \to L(H)/_{K(H)}.$$

Solch ein τ heißt Busby-Invariante der Erweiterung. Auf der Menge der starken Isomorphieklassen definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$\tau_1 \approx \tau_2 \iff \text{Es gibt einen unitären Operator } u \in L(H) \text{ mit } \tau_2(c) = \pi(u)\tau_1(c)\pi(u)^*.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit Ext(C). Man kann eine Verknüpfung auf Ext(C) definieren, welche Ext(C) zu einer Halbgruppe macht, deren neutrales Element die Klasse der trivialen Erweiterungen ist. Nun haben wir folgendes Resultat.

Theorem 4.1 *Es sei $A \in M_N(\{0,1\})$ eine Matrix ohne Nullspalten bzw. Nullzeilen. Es sei $\mathcal{A}$ die asymptotische C^*-Algebra der durch A definierten topologischen Markovkette. Dann ist*

$$\text{Ext}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^N/_{(\mathbb{1}-A)\mathbb{Z}^N}.$$

Ausblick 3 Eine ganz andere Richtung nimmt die Theorie, wenn man Zustände des dynamischen Systems untersucht. Wir begeben uns hierzu wieder in das allgemeinere Umfeld von Smale-Räumen. Ein Zustand eines dynamischen Systems ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$, also ein Element der Einheitskugel des Dualraums der stetigen Funktionen auf X. Die Struktur als Smale-Raum impliziert folgenden Satz:

Satz 4.2 *Es sei $x \sim_s y$, dann gibt es eine Umgebung U von x und einen Homöomorphismus $\psi : U \to \psi(U) \subseteq X$ mit $\psi(y) = x$ und $z \sim_s \psi(z)$ für alle z in U. Ferner ist die Konvergenz (in der Definition der Äquivalenzrelation) gleichmäßig in z.*

Ein Paar (U, ψ) wie im Satz beschrieben heißt Konjugationshomöomorphismus.

Von besonderem Interesse sind Gleichgewichtszustände des Systems, dies sind W-Maße, welche die Entropie maximieren. Es ist jedoch sinnvoll, allgemeinere Gleichgewichtszustände zuzulassen. Dazu zunächst eine Verallgemeinerung der Entropie.

Definition 4.3 Es sei $f : X \to X$ ein dynamisches System, d eine die Topologie erzeugende Metrik, $\varphi \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Es sei

$$S_n\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$N_d(f, \varphi, \varepsilon, n) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp S_n\varphi(x) \mid E \ \ (n, \varepsilon) - separierend \right\}.$$

Dann ist der topologische Druck von f bzgl. φ definiert als

$$P(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \log N_d(f, \varphi, \varepsilon, n).$$

Der topologische Druck der Nullfunktion ist die topologische Entropie.

Sei nun μ ein f-invariantes W-Maß, dann ist der Druck von μ bzgl. φ definiert als

$$P_\mu(\varphi) = h_\mu(f) + \int_X \varphi \, d\mu,$$

wobei $h_\mu(f)$ die metrische Entropie bezeichnet. Genau wie für die gewöhnliche Entropie gilt:

Satz 4.4 *Sei $f : X \to X$ ein Homöomorphismus und $\varphi \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Dann ist*

$$P(\varphi) = \sup \{ P_\mu(\varphi) \mid \mu \ \ f - \textit{invariantes W-Maß} \}.$$

Ein Gleichgewichtszustand des Systems bzgl. φ ist nun ein f-invariantes W-Maß μ mit $P_\mu(\varphi) = P(\varphi)$.

Um die C^*-Algebren ins Spiel zu bringen, ist eine weitere Formulierung vonnöten. Es sei (U, ψ) ein Konjugationshomöomorphismus und G die Äquivalenzrelation asymptotischer Äquivalenz. Definiere

$$V_\psi : G \to \mathbb{R}, \quad V_\psi(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y))$$

und

$$g_\psi : U \to \mathbb{R}, \quad g_\psi = \exp -V_\psi(x, \psi(x)).$$

Ein Gibbs-Zustand bzgl. φ ist ein f-invariantes W-Maß μ, so daß für alle Konjugationshomöomorphismen (U, ψ) gilt:

$$\psi(g_\psi \cdot \mu\big|_U) = \mu\big|_{\psi(U)}.$$

Gleichgewichtszustände sind Gibbzustände.

Definiere nun ein kontinuierliches C^*-dynamisches System α auf der stabilen C^*-Algebra $\mathcal{S}$ durch

$$(\alpha_t h)(x, y) = \exp(iV(x, y)t)h(x, y).$$

Ein Zustand ζ auf $\mathcal{S}$ heißt φ-invariant, falls $\zeta \circ \alpha_t = \zeta$. Ein φ-invarianter Zustand heißt KMS-Zustand, falls es für alle $h, k \in \mathcal{S}$ eine holomorphe Funktion F auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ gibt, welche stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann, so daß

$$\zeta(\alpha_t h * k) = F(t), \quad \zeta(k * \alpha_t h) = F(t + i)$$

gilt. Damit kommen wir endlich zum verbindenden

Theorem 4.5 *Es sei μ ein f-invariantes W-Maß auf X. Dann ist durch*

$$\hat{\mu}(h) = \int_X h(x, x)\, d\mu$$

ein Zustand auf $\mathcal{S}$ definiert. μ ist genau dann ein Gibbszustand bzgl. φ, wenn $\hat{\mu}$ ein KMS-Zustand bzgl. φ ist.

Die Untersuchung von Gleichgewichtszuständen des Systems kann also ganz auf die stabile Algebra $\mathcal{S}$ zurückgezogen werden.