Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:
a) Die Rekurrenzrelation führt durch Aufsummieren zur Gleichung für formale Potenzreihen

$$\sum_{n\geq 1} x_{n+1}z^n = \sum_{n\geq 1} x_n z^n + \sum_{n\geq 1} x_{n-1}z^n,$$

somit

$$\sum_{n\geq 1} x_{n+1}z^{n+1} = z\sum_{n\geq 1} x_n z^n + z^2\sum_{n\geq 1} x_{n-1}z^{n-1}.$$

Umindizieren und Abspalten von z^0, z^1 ergibt

$$(1-z-z^2)\sum_{n\geq 2} x_n z^n = z\cdot(x_1 z^1) + z^2(x_0 z^0 + x_1 z^1) = 2z^2 + z^3.$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{z^2+z-1} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

mit $a = -1+\sqrt{5}$, $b = -1-\sqrt{5}$, $A = \frac{1}{a-b} = 1/\sqrt{5} = -B$. Es gilt $ab = -1$, $a+b = -2$. Wegen $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ ist

$$\frac{1}{z-a} = \frac{b}{1+zb} = b\sum_{n\geq 0}(-bz)^n.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} x_n z^n &= -\frac{1}{\sqrt{5}}(2z^2+z^3)\sum_{n\geq 0}[b(-b)^n - a(-a)^n]z^n \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}[2\sum_{n\geq 2}[-(-b)^{n-1}+(-a)^{n-1}]z^n + \sum_{n\geq 3}[-(-b)^{n-2}+(-a)^{n-2}]z^n].\end{aligned}$$

Da zwei formale Potenzreihen gleich sind, wenn dies koeffizientweise gilt, erhalten wir $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}2(b-a) = 2$, und für $n > 2$ gilt mittels $-2b+1 = -b^3$, $-2a+1 = -a^3$:

$$\begin{aligned}x_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}}[-2(-b)^{n-1} - (-b)^{n-2} + 2(-a)^{n-1} + (-a)^{n-2}] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}[-[-2b+1](-b)^{n-2} + [-2a+1](-a)^{n-2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}[(-b)^{n+1} - (-a)^{n+1}].\end{aligned}$$

Somit ist

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Diese Formel gilt auch für $n = 0, 1, 2$, wie durch Einsetzen überprüft werden kann.

b) $n = 0, 1$ stimmt durch Einsetzen. Sei die Formel bis n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{n+1} - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}] + \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{n} - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[(-b)^{n+1} - (-a)^{n+1} + (-b)^n - (-a)^n] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{n+2} - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+2}]
\end{aligned}$$

wegen $a + 1 = -b$.

Aufgabe 2:
a) Für $k \leq 1$ und $x \in (0, 1]$ ist 0 der einzige Fixpunkt von $f(x) = kx(1 - x)$ (denn $x = kx(1 - x)$ impliziert $x = 0$ oder $x = 1 - 1/k$, und letzteres ist nur für $k > 1$ ein neuer Fixpunkt. Es gilt $0 \leq f(x) < x$. Also ist für jeden Startwert die Folge x_n monoton fallend und beschränkt, also konvergent gegen ein x^*. Da f stetig ist, gilt $f(x^*) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*$. Somit ist $x^* = 0$.

b) $x_{n+1}/x_n = k(1 - x_n) \to k$ für $n \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium ist die Konvergenz also exponentiell für $k < 1$ und nicht für $k = 1$, jeweils unabhängig von x_0.

Aufgabe 3:
a) Wenn m durch 10 teilbar ist, dann auch $2m$. Deshalb hängt die letzte Ziffer von 2^{n+1} nur von der letzten Ziffer von 2^n ab. Es gibt nur endlich viele Kombinationen, also muss es eine Wiederholung geben und ab da ist a_n periodisch. So eine Folge heißt *präperiodisch.* Damit sie wirklich periodisch ist, muss sich a_1 wiederholen. Wegen

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 6,\ a_5 = 2 = a_1$$

ist das der Fall und das Orbit ist wie angegeben.

b) Die letzten k Ziffern von 2^{n+1} hängen ebenfalls nur von den letzten k Ziffern von 2^n ab. Also ist b_n präperiodisch. b_1 wiederholt sich für $k > 1$ aber nicht, denn $b_N = b_1 = 0\ldots02$ impliziert $b_{N-1} = 0\ldots01$ oder $b_{N-1} = 50\ldots01$, was ungerade ist und somit keine Endziffern einer Potenz von 2.

c) Diese Folge sieht täuschend nach einer periodischen aus, jedoch ist $c_{46} = 7$ und nicht 6. Solche Abweichungen von dem periodischen Muster treten auch für beliebig große n auf.

Aufgabe 4:
Z.B.

$$f(x) = \frac{1}{4}x$$

auf $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 1$.