Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 1:
Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $a_1 \neq 0$ und der Fluss φ auf $\mathbb{T}^n$ definiert durch
$$\varphi_t([x]) := [x + ta].$$
Sei
$$S := \{[y] : y_1 = 0\}.$$
a) Wie groß ist für $x \in S$ die Wiederkehr-Zeit $\tau(x) = \min\{t > 0 : \varphi_t(x) \in S\}$?

Lösung: Die erste Koordinate von x ist $[x_1] = 0$. Wenn die erste Koordinate von $\varphi_t([x]) = [x + ta]$ gleich der ersten Koordinate von x (also Null) ist, gilt $(x_1 + ta_1) - x_1 \in \mathbb{Z}$, also $t \in \frac{1}{a_1}\mathbb{Z}$. Somit ist
$$\tau(x) = \min\left\{t > 0 : t \in \frac{1}{a_1}\mathbb{Z}\right\} = \frac{1}{|a_1|},$$
unabhängig von x.

b) Bestimmen Sie die Poincaré-Abbildung auf S.

Lösung: Es gilt
$$P = \varphi_\tau = \varphi_{\frac{1}{|a_1|}} : S \to S,$$
$$[(0, x_2, \ldots, x_n)] \mapsto \left[\left(0, x_2 + \frac{a_2}{|a_1|}, \ldots, x_n + \frac{x_n}{|a_1|}\right)\right].$$

c) Für welche a hat der Fluss periodische Orbits? Welche? Mit welcher Periode?

Lösung: P ist periodisch genau dann, wenn
$$\frac{a_2}{|a_1|} \in \mathbb{Q}, \ldots, \frac{a_n}{|a_1|} \in \mathbb{Q}.$$
Also gibt es $p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Z},\ q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$ mit
$$\frac{a_2}{|a_1|} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{a_n}{|a_1|} = \frac{p_n}{q_n}.$$
Jede Zahl $k > 0$ mit
$$k \cdot \left(\frac{a_2}{|a_1|}, \ldots, \frac{a_n}{|a_1|}\right) \in \mathbb{Z}^{n-1}$$
ist eine Periode von P. Für jedes solche k gilt:
$$q_2 | k, \ldots, q_n | k$$
und somit ist die kleinste Periode von P gleich dem größten gemeinsamen Teiler von $q_2, \ldots, q_n$, also
$$k = \mathrm{ggT}(q_2, \ldots, q_n).$$

Aufgabe 2:
Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und die Abbildung f auf $\mathbb{T}^n$ definiert durch

$$f([x]) := [x + a].$$

Für welche a hat die Abbildung periodische Orbits? Welche? Mit welcher Periode? (Vorsicht: Dies ist nicht dasselbe wie in der vorigen Aufgabe.)

Lösung: f hat periodische Orbits genau dann, wenn

$$a \in \mathbb{Q}^n,$$

also

$$a = (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}\right)$$

mit $p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Z},\ q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$. Jetzt ist jede Zahl $k > 0$ mit

$$ka \in \mathbb{Z}^n$$

eine Periode von P. Für jedes solche k gilt:

$$q_1 | k, \dots, q_n | k$$

und die kleinste Periode ist jetzt gleich dem größten gemeinsamen Teiler von $q_1, \dots, q_n$, also

$$k = \text{ggT}(q_1, \dots, q_n).$$

Aufgabe 3:
Sei φ ein Fluss, S ein (globaler) Schnitt von φ, und P die Poincaré-Abbildung auf S. Zu beweisen oder widerlegen:

a) Jedes periodische Orbit von φ enthält einen Fixpunkt von P.

Lösung: Widerlegung: Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und φ der Fluss auf X zur Differentialgleichung

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = 1 \quad \text{(in Polarkoordinaten)}$$

beziehungsweise

$$\varphi_t\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

in kartesischen Koordinaten, und sei

$$S = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 \neq 0,\ x_2 = 0 \right\}.$$

Dann ist jedes Orbit von φ periodisch (kreisförmig), aber es gilt für alle $x \in X$:

$$\tau(x) = \pi, \quad P(x) = -x$$

und somit ist x kein Fixpunkt.

b) Jedes periodische Orbit von φ enthält ein periodisches Orbit von P.

Lösung: Beweis: Es gilt $\varphi_{t_0}(x_0) = x_0$ für ein $t_0 > 0,\ x_0 \in X$. Da jedes Orbit S durchquert, können wir annehmen, dass $x_0 \in S$. Definiere die Folge $x_{i+1} := P(x_i) \in S$. Zu zeigen ist, dass die Folge endlich ist. Wir nehmen an, die Folge wäre unendlich. Dann gilt $\tau(x_i) \to 0$ für $i \to \infty$. Da $K := \varphi_{[0,t_0]}(x_0)$ kompakt ist und alle Folgenglieder enthält, gibt es einen Häufungspunkt $x^* \in K$. Wegen dem *flow-box*-Satz gibt es eine offene Umgebung U von x^*, so dass der Fluss C^1-konjugiert ist zum Einheitsrichtungsfluss auf V offen in $\mathbb{R}^n$, also gibt es einen Würfel der Kantenlänge $\varepsilon > 0$ in V um $h(x^*)$, und somit gilt $\tau(x) > \varepsilon$ in einer Umgebung von x^* in S, im Widerspruch zu $\tau(x_i) \to 0$ für $i \to \infty$.

c) Jedes periodische Orbit von P ist enthalten in einem periodischen Orbit von φ.

Lösung: Beweis: Wenn $P^k(x_0) = x_0$ ist für $x_0 \in S$, dann gibt es $x_1, \dots, x_k = x_0 \in S$, so dass für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt: $P(x_i) = x_i + 1$. Da $P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$, gilt also

$$\varphi_{\tau(x_i)}(x_i) = x_i + 1$$

und somit

$$\varphi_{\tau(x_0)+\cdots+\tau(x_{n-1})}(x_0) = x_0,$$

also ist x_0 periodisch für den Fluss φ.

Aufgabe 4:
Sei $f : U \to U$ ein Diffeomorphismus, U offen in $\mathbb{R}^n$. Zu zeigen: Die Formel für die **Suspension** von f, nämlich

$$\psi_t([(x,\theta)]) := [(f^{\lfloor t+\theta \rfloor}(x), t + \theta - \lfloor t+\theta \rfloor)]$$

mit $\lfloor a \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ definiert einen Fluss (d.h. $\psi_0 =$id, $\psi_{s+t} = \psi_s \circ \psi_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$). Der Fluss ist definiert auf $(U \times [0,1])/\sim$, wobei

$$(x,1) \sim (f(x), 0).$$

Lösung: Erstens gilt für $\theta \in [0,1)$, dass

$$\begin{aligned} \psi_0([(x,\theta)]) &= [(f^{\lfloor 0+\theta \rfloor}(x), 0 + \theta - \lfloor 0+\theta \rfloor)] \\ &= [(f^0(x), \theta - 0)] \\ &= [(x,\theta)]. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$r + k - \lfloor r + k \rfloor = r - \lfloor r \rfloor.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \psi_s(\psi_t([(x,\theta)])) &= \psi_s([(f^{\lfloor t+\theta \rfloor}(x), t + \theta - \lfloor t+\theta \rfloor)]) \\ &= [(f^{\lfloor s+t+\theta-\lfloor t+\theta \rfloor \rfloor}(f^{\lfloor t+\theta \rfloor}(x)), t + \theta - \lfloor t+\theta \rfloor + s - \lfloor t + \theta - \lfloor t+\theta \rfloor + s \rfloor)]) \\ &= [(f^{\lfloor t+\theta \rfloor + \lfloor s+t+\theta \rfloor - \lfloor t+\theta \rfloor}(x), s + t + \theta - \lfloor s+t+\theta \rfloor)] \\ &= \psi_{s+t}([(x,\theta)]). \end{aligned}$$