Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Blatt 9

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Selbstähnlichkeitsdimension folgender Mengen:

a) dem Menger-Schwamm in $\mathbb{R}^3$,

b) dem n-fachen Cantor-Staub $C\times\cdots\times C \subset \mathbb{R}^n$ (n-faches Produkt der Standard-Cantormenge C),

c) der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0,1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0,1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge x wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda x \in (0,1)$ entfernt wird usw.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Die Hausdorff-Dimension von einer abzählbaren Menge ist 0.

b) Konstruieren Sie eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit Box-Dimension n und Hausdorff-Dimension 0.

Aufgabe 3:
Sei h^d das d-dimensionale Hausdorff-Maß. Konstruieren Sie für jedes $d \in [0,\infty)$:

a) eine Menge A mit $h^d(A) \in (0,\infty)$,

b) eine Menge A mit Hausdorff-Dimension d und $h^d(A) = 0$,

c) eine Menge A mit Hausdorff-Dimension d und $h^d(A) = \infty$.

Aufgabe 4:
a) Zeigen Sie: Es gibt Mengen, so dass die Summe der Hausdorff-Dimensionen kleiner ist als die Hausdorff-Dimension des Produkts.

Tipp: Untersuchen Sie folgende $A, B \subset [0,1]$:

$$\begin{aligned} A &= \{0.x_1\ldots x_{n_1}0\ldots 0x_{n_2+1}\ldots x_{n_3}0\ldots 0x_{n_4+1}\ldots x_{n_5}\ldots\} \\ &= \{x \mid (x_{n_1+1}\ldots x_{n_2}) = (0\ldots 0),\ (x_{n_3+1}\ldots x_{n_4}) = (0\ldots 0),\ \ldots\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{0.0\ldots 0x_{n_1+1}\ldots x_{n_2}0\ldots 0x_{n_3+1}\ldots x_{n_4}\ldots\} \\ &= \{x \mid (x_1\ldots x_{n_1}) = (0\ldots 0),\ (x_{n_2+1}\ldots x_{n_3}) = (0\ldots 0),\ \ldots\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine schnell wachsende Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = 0, \qquad \dim_{\mathrm{H}}(B) = 0, \qquad \dim_{\mathrm{H}}(A\times B) = 1.$$

Abgabe: 23.6.2005 in der Vorlesung