Zentrumsmannigfaltigkeiten

Eva Maria Bartram

09. Mai 2006

Gliederung

1. Einleitung

Wir betrachten ein System $\dot{x} = f(x)$ von Differentialgleichungen mit $f(0) = 0$.
Eine Zentrumsmannigfaltigkeit ist eine invariante Mannigfaltigkeit tangential zum zentralen Eigenraum (dem Eigenraum der rein imaginären Eigenwerte der Linearisierung von f im Fixpunkt).
Wir wissen:

1.1 Hartmans Theorem:
Wenn $Df(\bar{x})$ (die Linearisierung von f im Fixpunkt) keine Eigenwerte mit Realteil Null hat, gibt es einen Homöomorohismus h mit $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (U Umgebung des Fixpunktes $\bar{x}$), der Orbits des nichtlinaeren Flusses ϕ_t der Differentialgleichung auf Orbits des linearen Flusses $e^{tDf(\bar{x})}$ der Linearisierung der Differentialgleichung abbildet. Dieser Homöomorphismus erhält die Richtung der Orbits und erhält Abstände bezüglich t.

1.2 Stabile Mannigfaltigkeiten-Theorem für einen Fixpunkt:
Wenn $\dot{x} = f(x)$ einen hyperbolischen Fixpunkt $\bar{x}$ hat, dann existieren lokal stabile und instabile Mannigfaltigkeiten $W^s_{loc}(\bar{x})$, $W^u_{loc}(\bar{x})$ derselben Dimension wie die Eigenräume E^s, E^u des linearisierten Systems, die im Fixpunkt tangential an E^s, E^u sind. $W^s_{loc}(\bar{x})$, $W^u_{loc}(\bar{x})$ besitzen denselben Glattheitsgrad wie die Funktion f.

Dies gilt für Zentrumsmannigfaltigkeiten leider nicht ganz so schön.

2. Zentrumsmannigfaltigkeits-Theorem für Flüsse

2.1 Zentrumsmannigfaltigkeits-Theorem für Flüsse
Sei f ein C^r-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$. Sei $A := Df(0)$. Teile das Spektrum von A in drei Teile $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$ mit

$$Re\lambda = \begin{cases} < 0 & \text{für} \lambda \in \sigma_s, \\ = 0 & \text{für} \lambda \in \sigma_c, \\ > 0 & \text{für} \lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

Sei E^s, E^c, E^u die (verallgemeinerten) Eigenräume bezüglich $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$.
Dann existieren stabile und instabile invariante C^r-Mannigfaltigkeiten W^u und W^s tangential an E^u und E^s an den Ursprung
und eine C^{r-1}-Zentrumsmannigfaltigkeit W^c tangential an E^c an den Ursprung.

Die Mannigfaltigkeiten W^u, W^s und W^c sind invariant unter dem Fluß von f. W^u und W^s sind eindeutig, W^c nicht unbedingt.

2.2 Beispiel für die Nichteindeutigkeit

Betrachte das System
$\dot{x} = x^2$,
$\dot{y} = -y$.
Die Lösungen sind
$x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$ und $y(t) = y_0 e^{-t}$.
Aus $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$ folgt $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t$.
Dies eingesetzt in $y(t)$ ergibt $y(x) = (y_0 e^{-\frac{1}{x_0}})e^{\frac{1}{x}}$. Dies sind die Lösungskrven.
Die Jakobi-Ableitung ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Also ist die y-Achse die stabile Mannigfaltigkeit und die x-Achse die (analytische) Zenrumsmannigfaltigkeit.
Für $x < 0$ nähern sich die Lösungskurven tangential dem Ursprung an.
Für $x = 0$ verschwinden alle Ableitungen, d.h. $\dot{y}(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$.
Für $x > 0$ ist die einzige Lösungskurve, die sich dem Ursprung annähert ($t \longrightarrow -\infty$), die x-Achse.
Also ist die Zentrumsmannigfaltigkeit tangential zu der Richtung des Eigenvektors zu 0 (der x-Achse) bei weitem nicht eindeutig:
Man erhält eine Zentrumsmannigfaltigkeit, indem man *jede* Lösungskurve in der linken Halbebene mit der positiven Hälfte der x-Achse zusammen nimmt.(Wie erwähnt ist die einzige analytische Zentrumsmannigfaltigkeit die x-Achse selbst.)

2.3 Beispiel für den Verlust der Glattheit

Betrachte das lineare System
$\dot{x} = ax$,
$\dot{y} = by$
mit $b > a > 0$.
Teilen der Gleichungen ergibt $\frac{dy}{dx} = \frac{by}{ax}$.
Die Lösungen hiervon sind $y(x) = c \cdot |x|^{\frac{b}{a}}$.
Dies sind also die Lösungskurven des Systems.
Wenn man eine dieser Kurven zum Ursprung erweitert, dann ist diese Erweiterung nicht C^∞, wenn $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$ und $c \neq 0$.
Wenn $r < \frac{b}{a} < r+1$, dann ist die erweiterte Kurve C^r, aber nicht C^{r+1}, da die $(r+1)$-ste Differentiation im Ursprung schief geht.
Selbst wenn $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$, ist die Kurve, die die Vereinigung der Null und zwei Lösungskurven rechts und links von Null ist, (im Allgemeinen) nur $(\frac{b}{a} - 1)$-mal differenzierbar.

Wir hoffen:
Wenn man ein Vektorfeld f schreibt als $f = f_u + f_s + f_c$ mit $f_u \in E^u, f_s \in E^s, f_c \in E^c$, zeigt uns $f_c|_{E^c}$ das dynamische Verhalten des Flusses in der Zentrumsmannigfaltigkeit. Dies ist allerdings nicht immer der Fall, wie man am Beispiel des Lorenz-Systems sehen kann. Im Allgemeinen ist es recht schwer, eine Zentrumsmannigfaltigkeit zu finden.

2.4 Beispiel: Das Lorenz-System

Lorenz-System:
$\dot{x} = \sigma(y - x)$,
$\dot{y} = \rho x - y - xz$,
$\dot{z} = -\beta z + xy$,
mit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma, \rho, \beta > 0$.
Wir untersuchen die Bifurkation des Lorenz-Systems in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ und $\rho = 1$:
Die Jakobi-Ableitung in 0 ist $\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$
Die Eigenwerte sind $0, -\sigma-1, -\beta$ mit Eigenvektoren $(1, 1, 0), (\sigma, -1, 0), (0, 0, 1)$.
Mit den Eigenvektoren als Basis für ein neues Koordinatensystem erhält man:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sigma} & \frac{\sigma}{1+\sigma} & 0 \\ \frac{1}{1+\sigma} & \frac{-1}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
In diesen Koordinaten erhält man:
$\dot{u} = \frac{-\sigma}{1+\sigma}(u + \sigma v)w$,
$\dot{v} = -(1 + \sigma)v + \frac{1}{1+\sigma}(u + \sigma v)w$,
$\dot{w} = -\beta w + (u + \sigma v)(u - v)$.
anders geschrieben:
$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-\sigma}{1+\sigma}(u + \sigma v)w \\ \frac{1}{1+\sigma}(u + \sigma v)w \\ (u + \sigma v)(u - v) \end{pmatrix},$$
so daß der lineare Teil jetzt in Diagonalform vorliegt.
In den Koordinaten (u, v, w) ist die Zentrumsmannigfaltigkeit eine Kure tangential zur u-Achse.
Bemerkung: Die Projektion des Systems auf die u-Achse (die man erhält, indem man $v = w = 0$ in der Gleichung für $\dot{u}$ setzt) führt zu $\dot{u} = 0$.
Die u-Achse ist nicht invariant, denn die Gleichung für $\dot{w}$ enthält den Ausdruck u^2.
Dies sieht man durch einen weiteren Koordinatenwechsel durch Setzen von $\tilde{w} = w - \frac{u^2}{\beta}$:

Man erhält:
$\dot{\tilde{w}} = \dot{w} - \frac{2u\dot{u}}{\beta} = -\beta\tilde{w} + (\sigma - 1)vu - \sigma v^2 + (\tilde{w} + \frac{u^2}{\beta})$.
Also erhalten wir im $(u, v, \tilde{w})$-Koordinatensystem:
$\dot{u} = -\frac{\sigma}{1+\sigma}(u + \sigma v)(\tilde{w} + \frac{u^2}{\beta})$.
Nun ergibt die Projektion der Gleichung auf die u-Achse in diesen Koordinaten:
$\dot{u} = -\frac{\sigma}{(1+\sigma)\beta}u^3$.
Bemerkung: Kein Term der Form u^2 taucht in den Gleichungen für v und $\tilde{w}$ auf, also ist die u-Achse invariant in den transformierten Gleichungen bis zur Ordnung 2.
Damit die u-Achse invariant unter dem Fluß wird (und wir damit eine Zentrumsmannigfaltigkeit gefunden haben) muß man zusätzliche Koordinatenwechsel durchführen.

Fragen:
Wie aber finden wir systematisch eine Zentrumsmannigfaltigkeit?
Und wie sieht der Fluß in ihr aus?

Antwort:

3. Approximationsmethode

Bei der Untersuchung des Lorenz-Systems haben wir bereits versucht, die (eindimensionale) Gleichung zu approximieren, um den Fluß in der Zentrumsmannigfaltigkeit zu erhalten.
Jetzt versuchen wir, eine systematische Methode für solche Approximationen zu finden.

Das Zentrumsmannigfaltigkeits-Theorem impliziert, daß das Bifurkationsproblem lokal topologisch äquivalent zu
$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x)$,
$\dot{\tilde{y}} = -\tilde{y}$,
$\dot{\tilde{z}} = \tilde{z}$
ist, wobei $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in W^c \times W^s \times W^u$ im Bifurkationspunkt.
Wir gehen das Problem an, indem wir das reduzierte Vektorfeld $\tilde{f}$ berechnen.
Zur Vereinfachung, und weil es der physikalisch interessanteste Fall ist, nehmen wir an, daß die instabile Mannigfaltigkeit leer ist und daß der lineare Teil des Bifurkationssystems in Block-Diagonalform vorliegt:
$\dot{x} = Bx + f(x, y)$,

$\dot{y} = Cy + g(x,y), (\star)$,
wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und B $(n \times n)$-Matrix, C $(m \times m)$-Matrix, deren Eigenwerte Realteil Null bzw. negativ sind, und f und g verschwinden (sind Null) in ihrer ersten partiellen Ableitung im Ursprung.
Da die Zentrumsmannigfaltigkeit tangential an E^c (dem $(y = 0)$-Raum) ist, können wir sie darstellen als (lokalen) Graph $W^c = \{(x,y)|y = h(x))\}$ mit $h(0) = Dh(0) = 0$,
wobei $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert ist auf einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Ursprungs.
Nun betrachten wir die Projektion des Vektorfelds auf $y = h(x)$ auf E^c:
$\dot{x} = Bx + f(x, h(x))$.
Da $h(x)$ tangential zu $y = 0$, bieten die Lösungen dieses Systems eine gute Approximation des Flusses $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x)$ eingeschränkt auf W^c.
Dies führt zu folgendem

3.1 Theorem

Wenn der Urspung $x = 0$ des Systems $\dot{x} = Bx + f(x, h(x))$ lokal asymptotisch stabil (bzw. instabil) ist, dann ist der Ursprung des Systems $(\star)$ ebenfalls lokal asymptotisch stabil (bzw. instabil).

Jetzt: Wie kann man $h(x)$ berechnen oder wenigstens approximieren?
Substituieren durch $y = h(x)$ in der zweiten Komponente von $(\star)$ und Benutzen der Kettenregel:
Man erhält: $\dot{y} = (h(x)) = Dh(x)\dot{x} = Dh(x)(Bx + f(x, h(x))) = Ch(x) + g(x, h(x))$
oder
$\aleph(h(x)) = Dh(x)(Bx + f(x, h(x))) - Ch(x) - g(x, h(x)) = 0$
mit den Randbedingungen $h(0) = Dh(0) = 0$.
Diese (partielle) Differentialgleichung für h kann (natürlich) in den meisetn Fällen nicht exakt gelöst werden. (Hätte man dies allerdings geschafft, hätte man eine Lösung für die ursprüngliche Gleichung gefunden.)
Aber: Ihre Lösung kann beliebig nahe an eine Taylorreihe in $x = 0$ approximiert werden:

3.2 Theorem

Wenn eine Funktion $\phi(x)$ mit $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ gefunden werden kann, so daß $\aleph(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^p)$ für ein $p > 1$ und $|x| \longrightarrow 0$, dann folgt, daß $h(x) = \phi(x) + \mathcal{O}(|x|^p)$ für $|x| \longrightarrow 0$.

Also können wir $h(x)$ beliebig nah approximieren, indem wir Reihenlösungen von $\aleph(h(x)) = Dh(x)(Bx + f(x, h(x))) - (h(x) - g(x, h(x))) = 0$ finden.

Allerdings existieren solche Taylorreihenerweiterungen nicht immer, da W^c im Ursprung auch nicht-analytisch sein kann.

3.3 Bemerkung

Man kann diese Approximationsmathode auch erweitern auf parametrisierte Familien von Systemen.
Erweitere das System ($\star$):
Angenommen, die Matrizen B, C und die Funktionen f, g hängen von einem k-Vektor aus Parametern, μ, ab.
Schreibe das erweiterte System als
$\dot{x} = B_\mu x + f_\mu(x, y)$
$\dot{y} = C_\mu x + g_\mu(x, y)$
$\dot{\mu} = 0$
mit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^k$.
In $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ besitzt dieses System eine $(n + k)$-dimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit tangential zum (x, μ)-Raum, welche ebenso durch Potenzreihen (in x und μ) eines Graphen $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ approximiert werden kann.

3.4 Beispiel für die Benutzung der Approximationsmethode

Betrachte das System
$\dot{u} = v$
$\dot{v} = -v + \alpha u^2 + \beta uv,$
wobei α und β im folgenden genauer spezifiziert werden.
Es gibt einen eindeutigen Fixpunkt $(0, 0)$ und die Eigenwerte des Systems sind 0 und -1.
Wieder: Benutzung der Eigenvektoren als Basis für ein neues Koordinatensystem:
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; T = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$
Damit lautet das transformierte System:
$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(x+y)^2 - \beta(x+y)y \end{pmatrix}$
bzw.
$\dot{x} = \alpha(x + y)^2 - \beta(xy + y^2),$
$\dot{y} = -y - \alpha(x + y)^2 + \beta(xy + y^2).$
Da E^c und E^s eindimensional sind, ist der Graph h eine reelwertige Funktion und wir erhalten:
$\aleph(h(x)) = h'(x)(\alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x)+(h(x))^2)) - (-h(x) - \alpha(x+h(x))^2 + \beta(xh(x) + (h(x))^2)) = 0.$
Wir setzen $h(x) = ax^2 + bx^3 + ...$ und setzen dies ein, um die unbekannten

Koeffizienten $a, b, ...$ zu finden und erhalten durch Koeffizientenvergleich:
$h(x) = -\alpha x^2 + \alpha(4\alpha - \beta)x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.
Also kann die Approximation geschrieben werden als
$\dot{x} = \alpha(x + h(x))^2 - \beta(xh(x) + (h(x))^2)$
$= \alpha(x^2 + (\beta - 2\alpha)x^3 + (9\alpha^2 - 7\alpha\beta + \beta^2)x^4) + \mathcal{O}(x^5)$,
oder, wenn $\alpha \neq 0$,
$\dot{x} = \alpha x^2 + (\alpha(\beta - 2\alpha)x^3) + \mathcal{O}(x^4)$.

4. Zentrumsmannigfaltigkeiten von Diffeomorphismen

Es gibt ein Zentrumsmannigfaltigkeitstheorem für Diffeomorphismen in einem Fixpunkt entsprechend dem, das wir für Flüsse in einem Fixpunkt haben.
An einem Fixpunkt p eines Diffeomorphismus G gibt es invariante Mannigfaltigkeiten, entsprechend den verallgemeinerten Eigenräumen von $DG(p)$ für Eigenwerte λ mit $|\lambda| < 1, |\lambda| = 1$oder $|\lambda| > 1$,d.h. die innerhalb, auf oder außerhalb des Einheitskreises liegen.
Zentrumsmannigfaltigkeiten von Diffeomorphismen können in der gleichen Weise wie für Flüsse approximiert werden.
Angenommen, wir haben ein System der Form
$x_{n+1} = Bx_n + F(x_n, y_n)$,
$y_{n+1} = Cy_n + G(x_n, y_n)$,
wobei alle Eigenwerte von B auf dem Einheitskreis liegen ($|\lambda| = 1$) und alle Eigenwerte von C im Einheitskreis ($|\lambda| < 1$).
Wir suchen wieder die Zentrumsmannigfaltigkeit als Graph $y = h(x)$.
Substitution ergibt
$y_{n+1} = h(x_{n+1}) = h(Bx_n + F(x_n, h(x_n))) = Ch(x_n) + G(x_n, h(x_n))$
oder
$\aleph(h(x)) = h(Bx + F(x, h(x))) - Ch(x_n) - G(x_n, h(x_n)) = 0$
und wir können wieder mit der Potenzreihenmethode approximieren.

4.1 Beispiel für Approximationsmethode für Diffeomorphismen

Betrachte die Abbildung
$x_{n+1} = x_n + x_n y_n$,
$y_{n+1} = \lambda y_n - x_n^2$, $0 < \lambda < 1$.
Sei $y = h(x) = ax^2 + bx^3 + \mathcal{O}(x^4)$.
Substitution ergibt:
$a(x + x(ax^2 + \mathcal{O}(x^3)))^2 + b(x + x(ax^2 + \mathcal{O}(x^3)))^3 - \lambda(ax^2 + bx^3) + x^2 = \mathcal{O}(x^4)$
bzw.
$ax^2 + bx^3 - \lambda ax^2 - \lambda bx^3 + x^2 = \mathcal{O}(x^4)$.

Koeffizientenvergleich ergibt: $a = \frac{1}{\lambda-1}$, $b = 0$.
Also erhalten wir $y = \frac{x^2}{\lambda-1} + \mathcal{O}(x^4)$ für die Zentrumsmannigfaltigkeit und $x_{n+1} = x_n + \frac{x^3}{\lambda-1}$ für das reduzierte System.
Da $(\lambda - 1) < 0$, ist die Nulllösung des reduzierten Systems und damit des ursprünglichen Systems lokal asymptotisch stabil.

Abschließende Bemerkung
In allen Beispielen wurde angenommen, daß die instabile Mannigfaltigkeit im Bifurkationspunkt leer ist.
Wenn dies nicht der Fall ist, muß man ein System der Form
$\dot{x} = Bx + f(x, y_s, y_u)$
$\dot{y_s} = C_s y + g_s(x, y_s, y_u)$
$\dot{y_u} = C_u z + g_u(x, y_s, y_u)$
mit $(x, y_s, y_u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u}$
betrachten, wobei die Eigenwerte von B wie zuvor alle Realteil Null, die von C_s negativen Realteil und die von C_u positiven Realteil haben.
Man sucht wieder nach einer Zentrumsmannigfaltigkeit als Graph über einer Umgebung $U \subset E^c$ mit $(y_s, y_u) = (h_s(x), h_u(x))$.
Indem man die Vektoren $\begin{pmatrix} y_s \\ y_u \end{pmatrix}$ für y, $\begin{pmatrix} g_s \\ g_u \end{pmatrix}$ für g und die Matrix $\begin{pmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_u \end{pmatrix}$ für C benutzt, kann man wie gehabt fortfahren.

Literatur

Guckenheimer, John and Holmes, Philip [1983]. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag: New York. S.123-138.