

# Homokline Orbits: Theorem von Shilnikov

Doris Bohnet

3. Juli 2006

## 1 Einleitung

Shilnikovs Theorem behandelt die Orbitstruktur in der Nähe von homoklinen Orbits, die biasymptotisch zu einem hyperbolischen Fixpunkt einer Differentialgleichung sind. Es stellen sich u.a. die Fragen, ob es chaotisches Verhalten in der Nähe des homoklinen Orbits gibt und inwieweit die Orbitstruktur stabil auf kleine Parameterveränderungen reagiert.

Shilnikovs Theorem, das ich in meinem Vortrag behandle, beschäftigt sich speziell mit einem homoklinen Orbit eines dreidimensionalen Flusses mit einem reellen Eigenwert und einem Paar komplex konjugierter Eigenwerte.

Für den Beweis von diesem Theorem benötigt man die Konstruktion einer Poincare-Abbildung. Diese ist aber darüber hinaus für die Untersuchung der Dynamik solcher Systeme interessant und läßt sich auch allgemeiner für  $n$ -dimensionale Systeme konstruieren. Durch Untersuchung der Dynamik der Poincare-Abbildung, beispielsweise durch das Finden von Fixpunkte oder Hufeisen, kann auf die Dynamik des Systems geschlossen werden, beispielsweise auf die Existenz von periodischen Orbits oder auf chaotisches Verhalten. Wegen der grundlegenden Bedeutung der Poincare-Abbildung für die Analyse führe ich die Konstruktion deshalb auch zunächst allgemein durch. Schwerpunkt dieses Vortrags ist das Theorem von Shilnikov, das ich auch vollständig beweisen möchte.

Am Ende steht ein kleiner Ausblick auf weitere Folgerungen aus Shilnikovs Theorem und Weiterentwicklungen ausgehend von Shilnikovs Arbeit.

## 2 Konstruktion der Poincare-Abbildung

Wir betrachten zunächst gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in \mathbf{R}^{s+u},$$

wobei  $F : \mathbf{R}^{s+u} \rightarrow \mathbf{R}^{s+u}$   $r$ -mal stetig differenzierbar ist,  $r \geq 2$ . Für die Konstruktion sind folgende Annahmen zu machen:

1. Die Differentialgleichung hat einen Fixpunkt bei  $z = z_0$ . Die Matrix  $DF(z_0)$  hat  $s$  Eigenwerte mit negativen Realteilen und  $u$  Eigenwerte mit positiven Realteilen.
2. Es gibt einen homoklinen Orbit an  $z_0$ , d.h. es gibt eine Lösung  $\phi(t)$ , so daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = z_0$ .

Um die Orbitstruktur in der Nähe des homoklinen Orbits untersuchen zu können, konstruiert man eine Poincare-Abbildung in der Nähe des homoklinen Orbits. Die obigen Annahmen sind für zwei- und dreidimensionale Systeme für die Konstruktion der Poincare-Abbildung hinreichend. In höherdimensionalen Systemen muß zusätzlich vorausgesetzt werden, daß der homokline Orbit eine nichtwandernde Menge ist.<sup>1</sup>

**Schritt 1: Wahl geeigneter Koordinaten:** Durch eine affine Transformation wird zunächst der Fixpunkt in den Ursprung verschoben.

Mit Hilfe der stabilen und instabilen Eigenräume werden dann neue Koordinaten definiert:

Die Jacobimatrix  $DF(0)$  kann durch lineare Transformation auf die folgende Form gebracht werden:

$$DF(0) = \begin{pmatrix} A & 0_{su} \\ 0_{us} & B \end{pmatrix},$$

mit  $A$   $s \times s$  Jordan-Block, deren Diagonaleinträge negativen Realteil haben,  $B$   $u \times u$  Jordan-Block, deren Diagonaleinträge positiven Realteil haben. Diese lineare Transformation auf die Differentialgleichung angewandt ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + F_1(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= B\eta + F_2(\xi, \eta), \end{aligned}$$

wobei  $F_1, F_2 = \mathcal{O}(|\xi|^2 + |\eta|^2)$ .

Aus dem Theorem der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten folgt die Existenz von  $\mathcal{C}^r$ -Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}^s$  und  $\mathcal{W}^u$ , die sich im Ursprung schneiden und tangential zu den stabilen und instabilen Eigenräumen sind.

In einer hinreichend kleinen Umgebung  $\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^u$  des Ursprungs können sie

---

<sup>1</sup>Dies folgt im Zwei- und Dreidimensionalen aus den beiden Annahmen.

als Graphen von  $C^r$ -Abbildungen  $\phi_s : \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^u$ ,  $\phi_u : \mathbf{R}^u \rightarrow \mathbf{R}^s$  dargestellt werden. Dadurch können die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten durch folgende Transformation als Koordinaten verwendet werden:

$$(x, y) = (\xi - \phi_u(\eta), \eta - \phi_s(\xi)).$$

Die Differentialgleichung erhält damit die Form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f_1(x, y) \\ \dot{y} &= By + f_2(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u, \end{aligned}$$

wobei  $f_1(0, y) = f_2(x, 0) = 0$  und  $f_1, f_2 \mathcal{O}(2)$ .

Damit ist  $y = 0$  die lokale stabile Mannigfaltigkeit,  $x = 0$  die lokale instabile Mannigfaltigkeit. Diese Koordinatentransformation ist aber nur in der Umgebung  $\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^u$  zulässig.

**Schritt 2: Konstruktion der Poincare-Abbildung:**  $\phi(t)$  bezeichne weiterhin die homokline Trajektorie, auch nach der Koordinatentransformation im 1. Schritt. Es gilt dann  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = 0$ . Betrachte folgende  $s + u - 1$ -dimensionale Mengen:

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon^s &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u \mid |x| = \epsilon, |y| < \epsilon\}, \\ \Sigma_\epsilon^u &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u \mid |x| < \epsilon, |y| = \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\epsilon$  so klein gewählt, daß der Abschluß dieser Mengen in der Umgebung  $\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^u$  enthalten ist.

Es gilt, daß  $\Sigma_\epsilon^s$  und  $\Sigma_\epsilon^u$  für hinreichend kleine  $\epsilon$  transversale Schnitte des Vektorfeldes sind.

Es ist für das Folgende sinnvoll, Bezeichnungen für die Schnitte der Mannigfaltigkeiten mit den Hyperflächen einzuführen:

$$\begin{aligned} S_\epsilon^s &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u \mid |x| = \epsilon, |y| = 0\}, \\ S_\epsilon^u &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^u \mid |x| = 0, |y| = \epsilon\}. \end{aligned}$$

Jetzt kann die Poincare-Abbildung konstruiert werden. Sie besteht aus der Verknüpfung von zwei Abbildungen. Eine ist in der Umgebung des Ursprungs definiert, die zweite ist außerhalb dieser Umgebung entlang des homoklinen Orbits definiert.

### Abbildung in der Nähe des Ursprungs:

Da die oben definierten Hyperflächen den Fluß transversal schneiden, erreichen alle Punkte aus  $\Sigma_\epsilon^s - S_\epsilon^s$  unter dem Fluß  $\Sigma_\epsilon^u - S_\epsilon^u$ .

Sei  $\phi(t, x_0, y_0) = (x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$  der von der Differentialgleichung erzeugte Fluß. Jeder Punkte  $(x_0, y_0) \in \Sigma_\epsilon^s - S_\epsilon^s$  erreicht in einer Zeit  $T = T(x_0, y_0) \in \Sigma_\epsilon^u - S_\epsilon^u$ , wobei  $T$  die Gleichung

$$|y(T, x_0, y_0)| = \epsilon$$

löst. Damit läßt sich nun die folgende Abbildung definieren:

$$P_0 : \Sigma_\epsilon^s - S_\epsilon^s \longrightarrow \Sigma_\epsilon^u - S_\epsilon^u$$

$$(x_0, y_0) \longmapsto (x(T(x_0, y_0), x_0, y_0), y(T(x_0, y_0), x_0, y_0)).$$

### Abbildung entlang des Orbits:

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  Schnittpunkte des homoklinen Orbits mit  $\Sigma_\epsilon^u$  und  $\Sigma_\epsilon^s$ . Seien  $U_\alpha$  und  $U_\beta$  Umgebungen von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in den entsprechenden Hyperflächen. Da  $\alpha$  und  $\beta$  auf dem homoklinen Orbit  $\phi(t)$  liegen, gibt es einen Zeitpunkt  $\tau$ , so daß  $\phi(\tau, \alpha) = \beta$ .

Da der Fluß  $C^r$  ist, kann die Umgebung  $U_\alpha$  so klein gewählt werden, daß  $\phi(\tau(u), u) \subset U_\beta$  für alle  $u \in U_\alpha$ . Damit läßt sich nun eine zweite Abbildung wie folgt definieren:

$$P_1 : U_\alpha \longrightarrow U_\beta$$

$$u \longmapsto \phi(\tau(u), u).$$

### Poincare-Abbildung:

Sei nun  $U_\beta \subset \Sigma_\epsilon^s$  und  $U_\alpha \subset \Sigma_\epsilon^u$ . Falls es möglich ist, eine offene Menge  $V_\beta$  auszuwählen, so daß  $P_0(V_\beta) \subset U_\alpha$  ist, dann kann die Poincare-Abbildung wie folgt definiert werden:

$$P \equiv P_1 \circ P_0 : V_\beta \longrightarrow U_\beta.$$

Dies ist nicht in allen Fällen möglich, aber auf jeden Fall für zwei- und dreidimensionale Systeme.

**Angenäherte Poincare-Abbildung:** Da die exakte Poincare-Abbildung nur angegeben werden kann, wenn die Differentialgleichung gelöst ist, bemüht man sich um eine Approximation der Poincare-Abbildung, die die Dynamik der exakten Abbildung gut wiedergibt. Die approximierten Poincare-Abbildung besteht wiederum aus der Verknüpfung von zwei Abbildungen. Für die erste Abbildung  $P_0^L$  verwendet man den Fluß, der von dem Linearanteil des Vektorfeldes erzeugt wird. Damit ist  $P_0^L$  direkt angebar als:

$$P_0^L : \Sigma_\epsilon^s - S_\epsilon^s \longrightarrow \Sigma_\epsilon^u - S_\epsilon^u$$

$$(x_0, y_0) \longmapsto (e^{AT} x_0, e^{BT} y_0),$$

wobei  $T$

$$\left| e^{BT} y_0 \right| = \epsilon$$

löst.

Die zweite Abbildung  $P_1^L$  erhält man aus der Taylor-Entwicklung von  $P_1$  um den Punkt  $\alpha$ . Damit ergibt sich:

$$P_1^L : U_\alpha \longrightarrow U_\beta$$

$$\alpha + u' \mapsto \beta + DP_1(\alpha)u'.$$

Analog zu oben wird - wenn möglich - eine offene Menge  $V_\beta \subset U_\beta$  gewählt und damit die approximierte Poincare-Abbildung wie folgt definiert:

$$P^L = P_1^L \circ P_0^L : V_\beta \longrightarrow U_\beta.$$

Es läßt sich nachweisen, daß die approximierte Poincare-Abbildung die exakte Poincare-Abbildung bis auf einen Fehler  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  in der Umgebung des Ursprungs annähert:

$$\left| P - P^L \right| = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \left| DP - DP^L \right| = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Damit läßt sich jetzt folgern, daß  $P$  einen hyperbolischen Fixpunkt  $(x_0, y_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  desselben Stabilitätstyps besitzt, falls  $P^L$  einen hyperbolischen Fixpunkt  $(x_0, y_0)$  besitzt. Ebenso ist  $P$  eine Hufeisenabbildung für hinreichend kleine  $\epsilon$ , falls es sich bei  $P^L$  um eine Hufeisenabbildung handelt.

Deshalb ist es möglich, die Dynamik des Systems auch an der approximierten Poincare-Abbildung zu untersuchen.

Nachdem ich nun diese Konstruktion der Poincare-Abbildung als Hilfsmittel zur Analyse der Dynamik möglichst allgemein vorgestellt habe, wende ich mich nun speziellen dreidimensionalen Flüssen zu, wie sie Gegenstand von Shilnikovs Theorem sind.

Es läßt sich zunächst allgemein festhalten, daß die Orbitstruktur in der Nähe eines homoklinen Orbits eines dreidimensionalen Flusses von zwei wichtigen Eigenschaften abhängt: von den *Eigenwerten* des im Fixpunkt linearisierten Vektorfeldes und von der Existenz von *Symmetrien*.

Shilnikovs Theorem behandelt speziell dreidimensionale Flüsse, die einen homoklinen Orbit besitzen, der biasymptotisch zu einem Sattel-Knoten-Punkt ist. Mit obiger Notation hieße das  $s = 2$  und  $u = 1$ .

### 3 Theorem von Shilnikov

Im Folgenden betrachten wir eine Differentialgleichung der folgenden Form:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta y + S(x, y, z) \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y + Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z),\end{aligned}$$

wobei  $S, Q, R$  zweimal stetig differenzierbar sind und am Ursprung ebenso wie ihre 1. Ableitung verschwinden, d.h. sie sind  $\mathcal{O}(2)$ .

Der Punkt  $(0, 0, 0)$  ist ein Fixpunkt, und die Eigenwerte sind  $\alpha \pm \beta, \lambda$ . Es wird angenommen, daß

1. es einen homoklinen Orbit  $\Gamma$  an  $(0, 0, 0)$  gibt,
2.  $\lambda > -\alpha > 0$  ist.

Also besitzt der Fixpunkt eine zweidimensionale stabile Mannigfaltigkeit und eine eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit, die sich nichttransversal schneiden. Unter diesen Voraussetzungen gilt nun das folgende Theorem von Shilnikov, das die Orbitstruktur in der Nähe von  $\Gamma$  beschreibt:

**Theorem von Shilnikov:** Wenn  $P$  eine Poincare-Abbildung auf einer geeigneten Hyperfläche  $\Pi_0$  ist, dann ist für jede gerade positive ganze Zahl  $m \in \mathbf{Z}$   $P$  auf einer geeigneten Menge  $O_m$  konjugiert zu einem Shift  $\sigma$  auf  $\Sigma^m = \{1, \dots, m\}^{\mathbf{Z}}$ , d.h. es gibt eine Abbildung  $h_m$ , so daß:

$$P|_{O_m} = h_m \circ \sigma \circ h_m^{-1}.$$

Außerdem ist die Menge  $O_m = h_m(\Sigma^m)$  hyperbolisch.

**Bemerkung:** Wenn die Poincare-Abbildung zu einem Shift konjugiert ist, folgt daraus, daß es in der Umgebung des homoklinen Orbits  $\Gamma$  unendlich viele periodische Orbits gibt.<sup>2</sup>

**Beweis: Schritt 1: Konstruktion der Poincare-Abbildung:**

Wie oben allgemein durchgeführt, kann zunächst eine approximierte Poincare-Abbildung konstruiert werden.

---

<sup>2</sup>[Tre84, S.442 ff.] und [Wig88, S.237] beweisen zusätzlich, daß die Poincare-Abbildung zu einem Subshift auf einer unendlichen Anzahl von Symbolen konjugiert ist.

Dafür werden wieder die zwei Abbildungen  $P_0^L$  und  $P_1^L$  benötigt.  
 Der in der Umgebung des Ursprungs linearisierte Fluß ist gegeben durch

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\alpha t}(x_0 \cos \beta t - y_0 \sin \beta t) \\y(t) &= e^{\alpha t}(x_0 \sin \beta t + y_0 \cos \beta t) \\z(t) &= z_0 e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Untersucht man die Lösungskurven, stellt man fest, daß die radiale Komponente in der Zeit kleiner wird, während die  $z$ -Komponente wächst, denn:

$$\begin{aligned}x^2(t) + y^2(t) &= e^{2\alpha t}(x_0^2 + y_0^2) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \\|z(t)| &= e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty.\end{aligned}$$

Seien zunächst  $\Pi_0$  ein Rechteck in der  $x - z$ -Ebene und  $\Pi_1$  ein Rechteck parallel zur  $x - y$ -Ebene bei  $z = \epsilon$ .

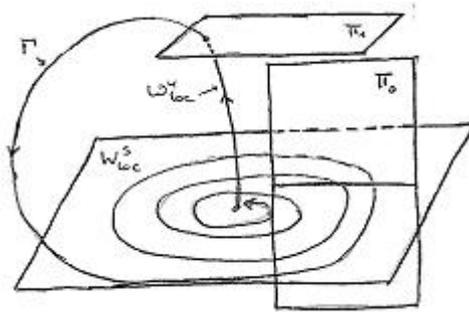


Abbildung 1:

Die erste Abbildung ist dann wie folgt zu definieren:

$$P_0^L : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z}\right) \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z}\right) \\ \epsilon \end{pmatrix}.$$

Man erhält sie direkt aus dem Fluß, ausgewertet für die Zeit  $T$ , die Punkte von  $\Pi_0$  nach  $\Pi_1$  benötigen. Dabei ist

$$T = \frac{1}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z_0}.$$

Damit  $P_0^L$  ein Homöomorphismus ist, muß  $\Pi_0$  so definiert werden, daß Punkte, die in  $\Pi_0$  starten,  $\Pi_0$  nicht mehr schneiden, bevor sie  $\Pi_1$  erreichen.

$\Pi_0$  muß dann wie folgt definiert werden:

$$\Pi_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \leq x \leq \epsilon, 0 < z \leq \epsilon \right\}.$$

$\Pi_1$  sei so gewählt, daß  $P_0^L(\Pi_0) \subset \Pi_1$ .

Wie sieht  $P_0^L(\Pi_0)$  aus?

Zunächst ist es sinnvoll, Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  einzuführen.

Dann folgt aus :

$$(r, \theta) = \left( x \left( \frac{\epsilon}{z} \right)^{\frac{\alpha}{\lambda}}, \frac{\beta}{\alpha} \log \frac{\epsilon}{z} \right).$$

Eine vertikale Linie in  $\Pi_0$ , d.h.  $x = \text{const}$ , wird auf eine logarithmische Spirale abgebildet. Eine horizontale Linie in  $\Pi_0$ , d.h.  $z = \text{const}$ , wird auf eine radiale Linie abgebildet, die in den Punkt  $(0, 0, \epsilon)$  zeigt.

Man zerlege nun  $\Pi_0$  in eine Folge von Rechtecken,

$$R_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \leq x \leq \epsilon, \epsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\lambda}{\beta}} \leq z \leq \epsilon e^{\frac{-2\pi k\lambda}{\beta}} \right\}$$

so daß

$$\Pi_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k.$$

Es genügt, das Verhalten der horizontalen und vertikalen Ränder der Rechtecke unter  $P_0^L$  zu betrachten:

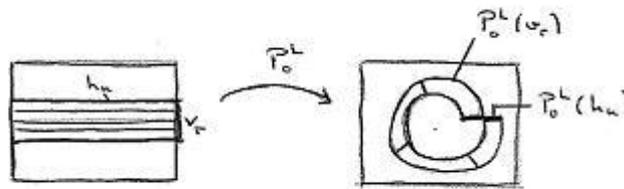


Abbildung 2:

Dieses Verhalten legt nahe, daß Hufeisen in diesem System auftauchen könnten. Doch zunächst muß noch die zweite Abbildung  $P_1^L$  wie oben konstruiert werden:

Sei  $U \subset \Pi_1$  eine offene Teilmenge, dann ist

$$P_1^L : U \longrightarrow \Pi_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \epsilon \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $(\bar{x}, 0, 0) \equiv \Gamma \cap \Pi_0$ ,  $\bar{x} = \epsilon \frac{1+e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}}{2}$ . Damit läßt sich jetzt die approximierte Poincare-Abbildung angeben:

$$P^L : P_1^L \circ P_0^L : V \subset \Pi_0 \longrightarrow \Pi_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \left[ a \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z}\right) + b \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z}\right) \right] + \bar{x} \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \left[ c \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z}\right) + d \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \log \frac{\epsilon}{z}\right) \right] \end{pmatrix},$$

mit  $V = (P_0^L)^{-1}(U)$ .

### Schritt 2: Nachweis der Hufeisen:

Nun muß gezeigt werden, daß  $P^L$  eine invariante Cantor-Menge enthält, auf der es zu der Shift-Abbildung konjugiert. Die Cantor-Menge erhält man, indem man zeigt, daß  $P^L$  eine abzählbare Menge von Hufeisen besitzt. Die unter  $P^L$  invariante Teilmenge der Hufeisen ist die gesuchte Cantor-Menge.

Betrachte ein Rechteck  $R_k$ , definiert wie oben. Zunächst muß sicher gestellt werden, daß die inneren und äußeren Grenzen von  $P^L(R_k)$  beide die obere Grenze von  $R_k$  schneiden. Es läßt sich nachweisen, daß die innere Grenze von  $P^L(R_k)$  die obere horizontale Grenze von  $R_i$  in mindestens zwei Punkten schneidet, falls  $i \geq \frac{k}{\rho}$ , mit  $1 \leq \rho < -\frac{\lambda}{\alpha}$ .

Diese Aussage<sup>3</sup> zeigt, daß die Voraussetzung  $\lambda > -\alpha > 0$  entscheidend für den Nachweis der Hufeisen ist. Denn für  $-\alpha > \lambda > 0$  würden die Bilder von  $R_k$  unterhalb der  $R_k$  fallen, wenn  $k$  hinreichend groß wird (vgl. Abbildung). Um die beiden Eigenschaften  $H1$  und  $H2$  von Hufeisen<sup>4</sup> nachweisen zu können, benötigt man die Jacobimatrix  $DP^L$ .

$$DP^L = \begin{pmatrix} D_x P_1^L & D_z P_1^L \\ D_x P_2^L & D_z P_2^L \end{pmatrix}$$

Es läßt sich wegen  $0 < -\alpha < \lambda$  zeigen, daß

$$\lim_{z \rightarrow 0} \|D_x P_1^L\| = 0$$

<sup>3</sup>Ein Beweis findet sich beispielsweise in [Wig88, S.233 ff.].

<sup>4</sup>Die Eigenschaften, die hier nachgewiesen werden, sind im Anhang aufgelistet. Sie stammen aus [Wig88, S.135 ff.].

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \|D_x P_2^L\| &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \left\| \left( D_z P_2^L \right)^{-1} \right\| &= 0\end{aligned}$$

Um die erste Hufeisenbedingung  $H1$  zu erfüllen, muß

$$\left\| D_z P_1^L \right\| \left\| \left( D_z P_1^L \right)^{-1} \right\|$$

für kleine  $z$  beschränkt sein. Angenommen, es gebe ein  $z$ , für das  $\left\| D_z P_1^L \right\| \left\| \left( D_z P_1^L \right)^{-1} \right\|$  unbeschränkt ist, dann gibt es aufgrund der Periodizität eine abzählbar unendliche Anzahl solcher  $z$ 's. Es soll aber nur die Existenz von abzählbar vielen Hufeisen, d.h. geeigneter Rechtecke in  $\Pi_0$ , nachgewiesen werden, d.h. die „schlechten“  $z$ 's stören nicht weiter, wenn sie zwischen die ausgewählten Rechtecke fallen. Dies kann immer durch kleine Veränderungen von  $\Pi_0$  und  $\Pi_1$  erreicht werden.

Für die zweite Hufeisenabbildung  $H2$  muß gezeigt werden, daß die ausgewählten horizontalen Streifen  $H_i$  die anderen Streifen  $H_j$  unter  $P^L$  in vertikalen Streifen schneiden, d.h.  $P^L(H_i) \cap H_j$  ist ein vertikaler Streifen. Es läßt sich zeigen, daß für hinreichend große  $k$   $P^L(R_k)$   $R_i$  in zwei vertikale Streifen schneidet, für  $i \geq \frac{k}{\rho}$  mit  $1 \leq \rho \leq \frac{-\lambda}{\rho}$ . Desweiteren liegen die Urbilder der Ränder der vertikalen Streifen in dem vertikalen Rand von  $R_k$ .<sup>5</sup> Mit Hilfe dieser Aussage lassen sich horizontale Streifen  $H_{-k}$ ,  $H_{+k}$  in jedem  $R_k$  -  $k$  hinreichend groß - finden, so daß  $H2$  erfüllt ist.

Dadurch läßt sich jetzt zeigen, daß  $P^L$  zu einem Shift konjugiert ist.

### Schritt 3: Shift von 2N Symbolen:

Für hinreichend großes  $k$  wähle  $N$  Rechtecke  $R_k, \dots, R_{k+N}$ .  $N$  ist so gewählt, daß  $k \geq \frac{(k+N)}{\rho}$  mit  $1 \leq \rho < -\frac{\lambda}{\alpha}$ . Es ist immer möglich, ein hinreichend großes  $k$  zu wählen, damit diese Bedingung erfüllt ist. Dann wähle horizontale Streifen  $H_{+i}, H_{-i}$  in  $R_i$ ,  $i = k, \dots, k + N$ , so daß  $P^L(H_{+i})$  und  $P^L(H_{-i})$  die Rechtecke  $R_k, \dots, R_{k+N}$  in vertikalen Streifen schneiden, so daß die zweite Hufeisenbedingung erfüllt ist. Dies ist nach obigen Überlegungen immer möglich.  $H_{+k}$  und  $H_{-k}$  werden jeweils die Symbole  $+k$  und  $-k$  zugeordnet. Dann gilt,<sup>6</sup> daß besitzt  $P^L$  eine invariante Cantormenge besitzt. Eingeschränkt auf diese Cantormenge ist  $P^L$  topologisch konjugiert zu zu einem Shift von 2N Symbolen.

<sup>5</sup>Für eine Beweis vgl. [Wig88, S.236 ff.].

<sup>6</sup>Ein entsprechender Satz findet sich in unserer Vorlesung „Dynamische Systeme“ sowie in [Wig88, S.120]. Der Satz besagt, daß eine Hufeisenabbildung eine invariante Menge besitzt, auf der sie zu einem Shift endlichen Typs topologisch konjugiert ist.

Eine direkte Folge davon ist - wie bereits oben bemerkt - , daß es in der Umgebung des homoklinen Orbits unendlich viele periodische Orbits beliebiger Periode gibt.

Es läßt sich nachweisen, daß eine endliche Anzahl von Hufeisen unter hinreichend kleinen  $\mathcal{C}^2$ -Störungen erhalten bleibt.<sup>7</sup>

## 4 Ausblick

Eine Folgerung aus Shilnikovs Theorem ergibt sich direkt aus dessen Anwendung auf den

$$-\lambda > \alpha > 0$$

durch Umkehrung der Zeit.

Falls

$$-\alpha > \lambda > 0$$

unter den Voraussetzungen von Shilnikovs Theorem gilt, dann gibt es keinen periodischen Orbit in einer hinreichend klein gewählten Umgebung von  $\Gamma$ . Stört man dieses System etwas in die positive  $z$ -Richtung, dann entsteht ein einzelner periodischer Orbit in einer Umgebung von  $\Gamma$ , der stabil ist. Wird das System nach unten gestört, d.h. in negative  $z$ -Richtung, dann ist 0 der einzige nicht wandernde Punkt in einer Umgebung von  $\Gamma$ .

Bei [Tre84] finden sich außerdem Anwendungen des Theorems auf symmetrische Differentialgleichung mit Paaren von homoklinen Orbits.

In [Wig88] werden Bifurkationen der homoklinen Orbits diskutiert. Kurz skizziert, wird das Verhalten eines parameterabhängigen homoklinen Orbits durch die Analyse einer parameterabhängigen Poincare-Abbildung untersucht. Statt zu untersuchen, wie die Hufeisen des parameterabhängigen Orbits sich verhalten, werden Fixpunkte der Poincare-Abbildung betrachtet. Jeder Fixpunkt der Poincare-Abbildung entspricht schließlich einem periodischen Orbit, der die Nähe des Ursprungs passiert, bevor er sich schließt.

Shilnikovs Theorem ist für dreidimensionale Systeme formuliert. Beim Übergang zu vier Dimensionen findet ein Sprung in Hinsicht auf die Komplexität und Schwierigkeit des Systems statt: Es gibt *mehr verschiedene Fälle* zu betrachten aufgrund der vier Eigenwerte; es gibt unterschiedliche *Hufeisen*, da man eine dreidimensionale Poincare-Abbildung betrachtet, so daß nicht nur eine kontrahierende und eine expandierende Richtung auftaucht wie im zweidimensionalen, sondern stattdessen zwei kontrahierende und eine

---

<sup>7</sup>Ein Beweis findet sich bei [Tre84, ] und bei [Hol83].

expandierende Richtung oder andersherum; auch die Berechnung der beiden Teilabbildungen der Poincare-Abbildung erschwert sich, da beispielsweise die instabile Mannigfaltigkeit zweidimensional sein kann; außerdem treten mehr *Symmetrien* auf, die mit der Existenz von homoklinen Orbits verträglich sind.

Shilnikov gelang dennoch eine allgemeine Aussage für die Dynamik von vierdimensionalen Systeme mit zwei Paaren komplex konjugierter Eigenwerte, ein Realteil positiv, der andere Realteil negativ, vom Betrag verschieden. Angenommen wird wieder ein homokliner Orbit an einen hyperbolischen Fixpunkt im Ursprung. Für solche Systeme wies Shilnikov nach, daß die entsprechende Poincare-Abbildung  $P^L$  eine abzählbar unendliche Menge von Hufeisen enthält mit ihrem entsprechend chaotischen Verhalten. Ebenfalls läßt sich zeigen, daß  $P^L$  zu einem Shift konjugiert ist.

Shilnikovs Theorem ist demnach insgesamt die Grundlage für viele weitere Untersuchungen der Dynamik in der Nähe eines homoklinen Orbits an einen hyperbolischen Fixpunkt.

## A

In [Wig88, S.134 ff.] finden sich Bedingungen, um die Existenz von Hufeisen nachzuweisen, die im obigen Beweis von Shilnikovs Theorem verwendet wurden, da sie in diesem Fall relativ leicht anzuwenden sind.

Sei  $f$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus von  $D$  nach  $f(D)$ .

$$H1: \|D_x f_1\| < 1$$

$$\|(D_y f_2)^{-1}\| < 1$$

$$1 - \|(D_y f_2)^{-1}\| \|D_x f_1\| > 2\sqrt{\|(D_y f_1)^{-1}\| \|D_x f_2\| \|(D_y f_2)^{-1}\|^2}$$

$$1 - (\|D_x f_1\| + \|(D_y f_2)^{-1}\|) + \|D_x f_1\| \|(D_y f_2)^{-1}\| > \|D_x f_2\| \|D_y f_1\| \|(D_y f_2)^{-1}\|,$$

wobei  $\|\cdot\|$  Supremumsnorm über alle  $(x, y) \in D$ .

$H2$  : Seien  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , horizontale Streifen. Für alle  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , die hintereinander in einer Symbolsequenz auftauchen, ist  $f(H_i) \cap H_j$  ein vertikaler Streifen. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \delta_v(f(H_i) \cap H_j) &\subset \delta f(H_i) \\ f^{-1}(\delta_v(f(H_i) \cap H_j)) &\subset \delta_v H_i, \end{aligned}$$

wobei  $\delta_v$  den vertikalen Rand der jeweiligen Mengen bezeichnet.

Erfüllt  $f$  die beiden obigen Bedingungen und sei  $\Lambda$  die maximale  $f$ -invariante Menge, dann folgt, daß  $f|_{\Lambda}$  topologisch konjugiert zu einem Shift von endlichem Typ ist. Dadurch besitzt  $f|_{\Lambda}$  dieselbe Dynamik wie der Shift, d.h. es gibt eine abzählbar unendliche Menge von periodischen Orbits, eine überabzählbare Menge von nichtperiodischen Orbits und mindestens ein dichtes Orbit. Es sei aber bemerkt, daß der Shift dennoch die Dynamik von  $f$  nicht vollständig beschreiben muß, da viele globalen dynamischen Eigenschaften die Umgebung von  $\Lambda$  mit einbeziehen.

## Literatur

- [Hol83] Guckenheimer; Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Tre84] C. Tresser. About some theorems by I.P. Sil'nikov. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 40:441–461, 1984.
- [Wig88] Stephen Wiggins. *Global Bifurcations and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1988.