Normalformen

Sei $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit $\mathbf{X(0) = 0)}$. Dieses kann in eine Taylorreihe um den Nullpunkt entwickelt werden:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + \ldots + \mathbf{X_k} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{\mathbf{k+1}}) \tag{1}$$

wobei $\mathbf{X_r} \in H^r$. H^r ist der Vektorraum aller Vektorfelder, deren Komponenten Polynome r-ter Ordnung sind. Für den Term erster Ordnung gilt
$\mathbf{X_1} = \mathbf{dX}(\mathbf{0})\mathbf{x} = \mathbf{Ax}$
Gesucht ist eine Reihe von Transformationen, die sukzessive alle nichtlinearen Terme $\mathbf{X_r}$, angefangen bei r=2, entfernen. Diese Transformationen sind von der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h_r}(\mathbf{y}), \mathbf{h_r} \in H^r \tag{2}$$

mit $r \geq 2$. Im Idealfall wird die Differentialgeichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ in $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay}$ transformiert. Offensichtlich ist dies nicht immer möglich.
Zuerst wird die Wirkung der Transformation auf $\mathbf{X_1} = \mathbf{Ax}$ untersucht. Es folgt

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay} - [\mathbf{dh_r}(\mathbf{y})\mathbf{Ay} - \mathbf{Ah_r}(\mathbf{y})] + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{\mathbf{r+1}}) \tag{3}$$

Die Größe

$$[\mathbf{dh_r}(\mathbf{y})\mathbf{Ay} - \mathbf{Ah_r}(\mathbf{y})] \tag{4}$$

ist unter dem Namen Lie- oder Poisson-Klammer bekannt. Der Operator
$\mathbf{L_A} : H^r \to H^r$ wird nun so definiert, dass $\mathbf{L_A h_r}(\mathbf{y})$ gerade die Lie-Klammer von $\mathbf{Ay}$ und $\mathbf{h_r}(\mathbf{y})$ ist. Für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{X_r}, \mathbf{X_r} \in H^r, r \geq 2$, folgt

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay} - \mathbf{L_A h_r}(\mathbf{y}) + \mathbf{X_r}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{\mathbf{r+1}}) \tag{5}$$

Dies bedeutet, dass alle nichtlinearen Terme der Ordnung $\leq r$ entfernt werden können, wenn $\mathbf{L_A}$ invertierbar ist. Um die Invertierbarkeit von $\mathbf{L_A}$ zu untersuchen, können die Eigenwerte von $\mathbf{L_A}$ näher betrachtet werden. Angenommen, A habe n verschiedene Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ mit Eigenvektoren $\mathbf{e_i}$. Seien $x_1, \ldots, x_n$ die zu dieser Eigenbasis gehörenden Koordinaten. Es folgt

$$\mathbf{L_A x^m e_i} = [(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_i]\mathbf{x^m e_i} \tag{6}$$

wobei $\mathbf{x^m} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ und $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Für $\mathbf{m}$ muss weiterhin gelten: $\sum_{i=1}^n m_i = r$. Der Operator $\mathbf{L_A}$ ist also genau dann invertierbar, wenn für alle zugelassenen $\mathbf{m}$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt: $(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_i \neq 0$. Ist L_A nicht invertierbar, so können nicht alle nichtlinearen Anteile entfernt werden. Dies ist die wesentliche Aussage des folgenden Satzes:
Sei $\mathbf{X(x)}$ ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{X(x)=0}$. Dann existiert eine Koordinatentransformation auf neue Koordinaten $\mathbf{y}$, so dass die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ die Form

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay} + \sum_{\mathbf{r=2}}^{\mathbf{N}} \mathbf{w_r}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{\mathbf{N+1}}) \tag{7}$$

annimmt, wobei $\mathbf{A}$ die Diagonalform von $\mathbf{dX(0)}$ ist und $\mathbf{w_r} \in G^r$. G^r ist ein komplementärer Unterraum zu $B^r = \mathbf{L_A}(H^r)$.