Einige Eigenschaften multimodaler Abbildungen

Niko Koelen

September 2006

In einem Artikel aus dem Jahr 2004 haben Sebastian van Strien und Edson Vargas [V,vS] Ergebnisse der Forschungstätigkeiten aus den letzten Jahren über sogenannte multimodale Abbildungen zusammengefasst. Der vorliegende Text [1] verfolgt im Wesentlichen das Ziel, dem Leser einen Eindruck der dort verwendeten Begriffe und erzielten Resultate zu vermitteln. Durch die Beschränkung auf den Fall eindimensionaler Abbildungen auf Kompakta konnte die Theorie sehr weit gedeihen; dies geht allerdings einher mit einer gewissen Abstraktheit der Konzepte. Diese bedingt, dass ich an dieser Stelle nicht alle Theoreme in der ursprünglichen Allgemeinheit formulieren kann, ohne einen sinnvoll vertretbaren Aufwand zu überschreiten. An den entsprechenden Stellen werde ich jedoch Hinweise auf stärkere Resultate einfügen. Für diese, und leider auch die recht umfänglichen und technischen Beweise, verweise ich den Leser mit einigem Bedauern an den Originalartikel.

Im Folgenden sei $M = [-1, 1]$ oder $M = S^1$ und $f : M \to M$ eine hinreichend glatte Abbildung (was das genau heisst, ist dann jeweils angegeben). f heisst *multimodal*, wenn M eine Zerlegung in endlich viele Unterintervalle besitzt, auf denen f strikt monoton ist. Die *kritischen Punkte* von f (an denen $f' = 0$) seien durch $c_1, ..., c_d$ bezeichnet. Weiterhin gelten folgende Annahmen: f sei *nichtflach* in seinen kritischen Punkten, was meint, das

$$f(x) = \pm|\tilde{f}_i(x)|^{\beta_i} + f(c_i), \text{ x nahe } c_i,$$

mit $\tilde{f}_i$ C^k, $\tilde{f}_i(c_i) = 0$ und $\beta_i > 1$, wenn f C^k ausserhalb c_i. Über eine solche Abbildung sagen wir, sie liege in der Klasse A^k. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird der Rand von M unter f auf sich selbst abgebildet. Wenn B eine Borelmenge ist, ordnen wir ihr durch $|B|$ ihr Lebuesge-Maß zu. Jetzt noch einige wichtige Definitionen:

[1] Entstanden im Rahmen eines Seminars über Dynamische Systeme an der Universität Hamburg bei Herrn Prof. Gunesch.

Definition (skalierte Umgebungen)
Seien U und V beschränkte Intervalle, wobei die abgeschlossene Hülle von U im Inneren von V liege. Ferner seien U^+ und U^- die Zusammenhangskomponenten von $V \backslash U$. Gelten

$$|U^+| \geq \alpha|U| \ , \ |U^-| \geq \alpha|U|,$$

so heisst V α-skalierte Umgebung *von U. Wir sagen auch, U liege* α-gut in V.

Definition (nette Intervalle)
Ein offenes Intervall $I \subset [-1, 1]$ heisst nett, *wenn der Vorwärtsorbit seines Randes I nicht mehr schneidet:*

$$I \cap f^i(\partial I) = \emptyset \ \ \forall i \geq 0.$$

Nun definieren wir eine Sequenz netter Intervalle $I_1, I_2, ...$ um $x \in M$. Hierzu seien ϕ_n die Rückkehrabbildung (first return map, Poincaré-Abbildung) zu I_{n-1} und dom(ϕ_n) ihr Urbild, und wir wählen für I_n diejenige Teilmenge des Urbildes von ϕ_n , die x enthält, $x \in I_n \subset \mathrm{dom}(\phi_n)$:

$$I_{n+1} \xrightarrow{\phi_{n+1}} I_n \xrightarrow{\phi_n} \cdots \xrightarrow{\phi_2} I_1 \xrightarrow{\phi_1} I_0$$

Wenn $x \notin \mathrm{dom}(\phi_n)$, definiere $I_{n+1} = I_n = \cdots = \emptyset$. Eine Bemerkung: Wenn x wiederkehrend (recurrent) ist, so folgt $I_n \neq \emptyset \ \forall n$; ist I_0 periodisch, so ist $I_n = I_0$.

Definition (nichtzentral)
$\phi_{n+1} : I_{n+1} \to I_n$ *heisst* nichtzentral (in $x \in I_{n+1}$), *wenn* $\phi_{n+1}(x) \notin I_{n+1}$.

Wir sagen, f habe *echte Grenzen* in x, wenn es ein $\xi > 0$ gibt, so dass I_{n+1} ξ-gut in I_n liegt.

Das erste Theorem macht eine ziemlich starke Aussage über das Verhalten der Wiederkehrabbildung einer großen Menge multimodaler Abbildungen.

Theorem A *Sei f aus A^2 , $\xi > 0$, $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion, $x \in M$, $\phi_1 : I_1 \to I_0$ nichtzentral in x. Dann gilt*

1. *Wenn $\phi_n : I_n \to I_{n-1}$ nichtzentral in x und $n \geq 2$ ist, so liegt I_{n+1} ξ-gut in I_n.*

2. *Wenn I_{n+1} ξ-gut in I_n ist, sind alle Urbilder der Rückkehrabbildung zu I_{n+1} $\xi' = \rho(\xi)$-gut in I_{n+1}.*

Hierbei sind ρ und ξ universell; sie hängen nicht von der Dynamik von f ab. Tatsächlich genügt es sogar, anzunehmen, dass f in A^1 liegt und zusätzlich die erste Ableitung *Zygmund-glatt* ist, also einem Lipschitz- bzw. Hölderraum mit Exponenten 1 angehört.

Aus dem im Artikel von Vargas und van Strien geführten Beweis lässt sich ein interessantes Korollar ableiten; der Sachverhalt ist zwar bereits seit einigen Jahren bekannt, der Beweis nach Angaben der Autoren aber mit dem vorliegenden Instrumentarium deutlich einfacher. Es handelt sich dabei um die
Korollar (Nichtexistenz wandernder Intervalle)
Sei f aus A^2 (bzw. $A^{1+Zygmund}$) und $J \in M$ ein Intervall, für das alle Iterierten J, $f(J)$, ... jeweils nicht zusammenhängen. Dann konvergiert $\{f^n(J)\}_{n\geq 0}$ gegen ein -eventuell einseitig- anziehendes periodisches Orbit.

Aus diesem Korollar folgt sofort das *Kontraktionsprinzip*:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ , so dass, wenn } J \text{ ein Intervall ist mit } |J| < \epsilon$$

welches nicht den Einzugsbereich eines periodischen Attraktors schneidet,

jede Komponente von $f^{-n}(J)$ Länge $\leq \delta$ hat.

Theorem A bleibt relevant selbst wenn f unendlich oft *renormalisierbar* ist. Renormalisierbarkeit im Kontext der hier verwendeten Begriffe definiert sich wie folgt:
Definition (Renormalisierbar)
Es gelte

$$\phi_{n+1} : I_{n+1} \to I_n \text{ zentral in } x \ \forall n \geq n_0 \ .$$

Dies impliziert, dass $x \in \bigcap I_n$, und I_n ist ein periodisches Intervall. Besteht I_n aus mehr als einem Punkt, so heisst ϕ renormalisierbar in x.

Theorem B
Für alle $f \in A^2$ (bzw. $A^{1+Zygmund}$) gibt es ein $\xi > 0$, so dass für jeden nichtperiodischen Punkt $x \in M$, der nicht im Einzugsbereich eines periodischen Attraktors liegt, entweder (1) oder (2) gilt:

1. *f ist unendlich oft renormalisierbar in x vom Feigenbaum-Typ: Es gibt eine Ganze Zahl p und nette periodische Intervalle K_n der Periode $p2^n$ $\forall n \geq n_0$, die x enthalten, so dass K_{n+1} ξ-gut in K_n ist.*
2. *Es gibt beliebig kleine nette Intervalle I um x , so dass das Urbild der Rückkehrabbildung ("return domain") J zu I , die x enthält, ξ-gut in I liegt.*

Theorem B heisst auch Satz von den kleinen echten Grenzen. Analog gibt es einen Satz über große echte Grenzen, den ich allerdings für konzeptionell zu aufwendig halte, um ihn hier zu präsentieren. Nicht unterschlagen möchte ich dagegen ein anderes Ergebniss, dass diese großen Grenzen ganz wesentlich in seinem Beweis verwendet. Es handelt sich um folgenden Satz über die Dichtheit sogenannter Axiom-A-Abbildungen:

Satz (Kozlovski, Shen, van Strien 2003 [KSvS])
Axiom-A-Abbildungen sind dicht im Raum reeller Polynome mit reellen kritischen Punkten.

Dieses Resultat ist verknüpft mit weitgehenden Aussagen über die strukturelle Stabilität bestimmter Flüsse. Es gilt: Ein C^1-Fluss ist genau dann strukturell stabil, wenn er ein Axiom-A-Fluss ist, der noch die *starke Transversalitätsbedingung* erfüllt. Für näheres verweise ich den Leser an die Literatur (Übersicht in [ED]) und merke nur an, dass zum Beispiel Morse-Smale[2]- und Anosov-Flüsse in diese Klasse fallen.

Ein anderes Problem, dass in den hier angetroffenen Kontexten immer wieder auftaucht, betrifft die in vielen Beweisen gemachte Voraussetzung, die betrachtete Abbildung habe eine negative *Schwarzsche Ableitung*[3]. Dies ist in vielen Fällen verzichtbar, wie der folgende Satz zeigt.

Satz (Negative Schwarzsche Ableitung)
$f : M \to M$ sei aus A^3. Dann gilt: Für jeden kritischen Punkt c_i , der nicht im Einzugsbereich eines periodischen Attraktors liegt, gibt es eine Umgebung $U_i(c_i)$, so dass mit $f^n(x) \in U_i$, $x \in M$, $n \geq 0$ richtig ist:

$$S\, f^{n+1}(x) < 0$$

Von diesem Satz existiert eine noch stärkere Variante, die Duncan Sands [DS] bewiesen hat: Wenn alle periodischen Punkte hyperbolisch und abstoßend sind, ist f konjugiert zu einer Abbildung mit negativer Schwarzscher Ableitung.

Für den letzten Satz rufe ich noch einige bekannte Definitionen in Erinnerung.

Eine nichtleere abgeschlossene invariante Menge A heisst *minimal*, wenn keine nichtleere abgeschlossene echte Untermenge invariant ist.

Ist A kompakt, so ist dies äquivalent zu $\omega(x) = \alpha(x) = A$ (jedes Vorwärtsorbit ist dicht). Aus dem Birkhoffschen Ergodensatz ergibt sich folgende Definition:

Ein System ist genau dann ergodisch, wenn alle invarianten Mengen oder ihre Komplemente vom Maß 0 sind (wir verwenden hier das Lebuesgue-Maß).

Der nächste Satz bezieht sich auf die ergodischen Eigenschaften der betrachteten Abbildungen.

---

[2] D.h., wenn der Fluss folgende Bedingungen erfüllt: Die Nichtwandernde Menge ist die Vereinigung einer je endlichen Zahl singulärer Punkte und geschlossener Orbits; die singulären Punkte und geschlossenen Orbits sind alle hyperbolisch; deren stabile und instabile Mannigfaltigkeiten schneiden sich je transversal.

[3] $S\, f = (\frac{d^3 f}{dx^3} / \frac{df}{dx}) - \frac{3}{2}(\frac{d^2 f}{dx^2} / \frac{df}{dx})^2$

Theorem (Ergodische Eigenschaften)

Für alle $f : M \to M$ aus A^3 gilt:

1. *Jede minimale Menge hat Lebuesge-Maß 0. Für alle $x \in X$ gibt es Intervalle$N_n \subset U_n$ mit $\cap U_n = \{x\}$, $(U_n \backslash N_n) \cap X = \emptyset$, und N_n ist ξ-gut in U_n mit $\xi > 0$ unabhängig von n.*

2. *Es gibt endlich viele kompakte vorwärts-invariante Mengen $X_1, ..., X_k$, so dass $\bigcup B(X_i)$ volles Maß in M hat. ($B(X_i)$ bezeichnet hierbei den Einzugsbereich von X_i).*

   Ausserdem gilt entweder

   - *X_i ist ein attraktives periodisches Orbit,*
   - *X_i ist ein Zyklus von Intervallen, die einen "turning point" (ein lokales Extremum) enthalten, so dass $\omega(x) = X_i$ für fast alle $x \in X_i$, oder*
   - *X_i ist eine minimale Menge mit mindestens einem wiederkehrenden kritischen Punkt.*

3. *Für jede Menge Y mit positivem Lebuesge-Maß und $f(Y) \subset Y$, die keine Einzugsbereiche periodischer Attraktoren schneidet und keine Intervalle enthält, existiert einen minimale Menge X, die einen kritischen Punkt enthält, so dass $|Y \cap B(X)| > 0$ und so, dass für $U_n \supset N_n$ aus (1) gilt:*
   $|Y \cap N_n|/|N_n| \to 1$.

4. *Wenn X_i kein attraktives periodisches Orbit ist, so ist $f_{|B(X_i)}$ ergodisch bezüglich des Lebuesge-Maßes. Die Anzahl dieser X_i ist bschränkt durch die Anzahl und Art der turning points von f.*

References

[V,vS] Edson Vargas, Sebastian van Strien:
Real Bounds, Ergodicity and negative Schwarzian Derivative for multimodal Maps.
Journ. Am. Math. Soc., Vol. 17, Number 4, Pages 749-782

[KSvS] O. Kozlovski, W. Shen, S. van Strien: Rigidity for real polynomials. Preprint 2003.
http://www.maths.warwick.ac.uk/~strien/Publications/

[DS] Duncan Sands, Jacek Graczyk, Grzegorz Świątek:
La dérivée Schwarzienne en dynamique unimodale
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 332 (2001) Série I, 329-332

[ED] Encyclopedic Dictionary of Mathematics. 2nd Ed., 126.J, p.497