

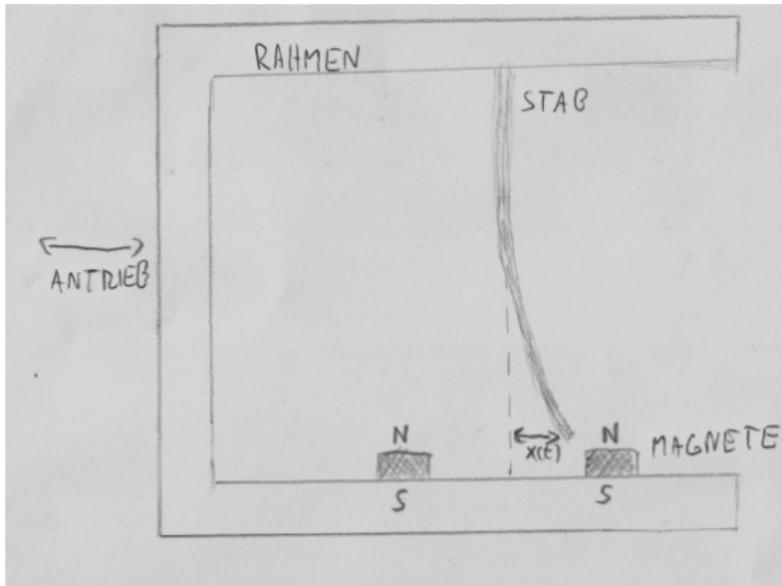
Der Duffing-Oszillator

Lennart Marien

11.04.2006

Das Modell
Vergleich mit Beobachtungen
Stationäre Duffing-Gleichung
Vollständige Duffing-Gleichung

Das Modell



Das Modell

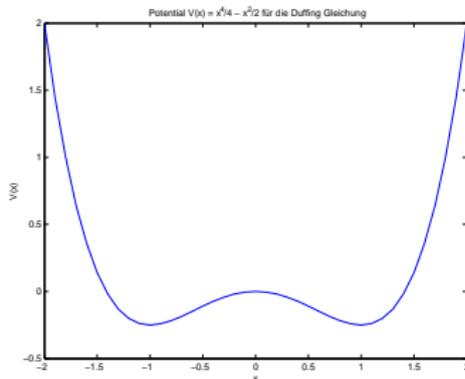
- ▶ Erwartung im stationären Fall: eine instabile Ruhelage, zwei asymptotisch stabile Ruhelagen.

Das Modell

- ▶ Erwartung im stationären Fall: eine instabile Ruhelage, zwei asymptotisch stabile Ruhelagen.
- ▶ Idee: „Potential“ $V(x) = x^4/4 - x^2/2$

Das Modell

- ▶ Erwartung im stationären Fall: eine instabile Ruhelage, zwei asymptotisch stabile Ruhelagen.
- ▶ Idee: „Potential“ $V(x) = x^4/4 - x^2/2$



Das Modell

- ▶ 2. Newton'sches Axiom: $F = m \cdot a$

Das Modell

- ▶ 2. Newton'sches Axiom: $F = m \cdot a$
- ▶ Der Gradient von V bestimmt die Kraft.

Das Modell

- ▶ 2. Newton'sches Axiom: $F = m \cdot a$
- ▶ Der Gradient von V bestimmt die Kraft.
- ▶ Potentialsystem:

$$x'' = -\nabla V = x - x^3$$

Das Modell

- ▶ Zusätzlich betrachten wir Reibung z.B. durch Luft:

Das Modell

- ▶ Zusätzlich betrachten wir Reibung z.B. durch Luft:
- ▶ $x'' + \delta x' - x + x^3 = 0$.

Das Modell

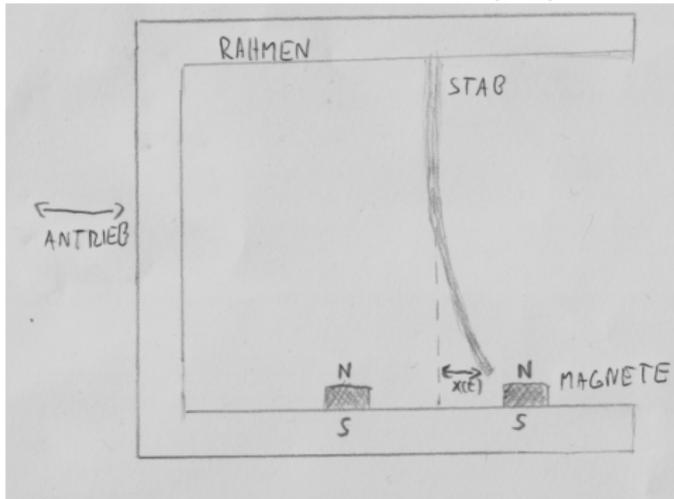
- ▶ Periodische Bewegung des Aufbaus:

Das Modell

- ▶ Periodische Bewegung des Aufbaus:
- ▶ $x'' + \delta x' - x + x^3 = \gamma \cdot \cos(\omega t)$.

Das Modell

- ▶ Periodische Bewegung des Aufbaus:
- ▶ $x'' + \delta x' - x + x^3 = \gamma \cdot \cos(\omega t)$.



Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Vereinfachungen:

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Vereinfachungen:
- ▶ lineare Reibung

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Vereinfachungen:
- ▶ lineare Reibung
- ▶ Modellierung der Magnetfelder

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Vereinfachungen:
- ▶ lineare Reibung
- ▶ Modellierung der Magnetfelder
- ▶ eine Raumdimension

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Krümmung im Ursprung des Stabs als Maß für die Auslenkung $x(t)$.

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Krümmung im Ursprung des Stabs als Maß für die Auslenkung $x(t)$.
- ▶ Für γ nahe bei 0: periodische Bewegungen um einen der Magnete.

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Krümmung im Ursprung des Stabs als Maß für die Auslenkung $x(t)$.
- ▶ Für γ nahe bei 0: periodische Bewegungen um einen der Magnete.
- ▶ Für große γ : anscheinend chaotische Oszillationen

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Beispiel für einen „chaotischen“ Parameterwert

Vergleich mit Beobachtungen

- ▶ Beispiel für einen „chaotischen“ Parameterwert
- ▶ (a) Beobachtungen (b) Simulation der Modellgleichung
- ▶ siehe [Guckenheimer, Holmes]

Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Zunächst: $\gamma = 0, \delta > 0$.

Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Zunächst: $\gamma = 0, \delta > 0$.
- ▶ Neuer Parameter β für den linearen Steifigkeitsterm.

Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Zunächst: $\gamma = 0, \delta > 0$.
- ▶ Neuer Parameter β für den linearen Steifigkeitsterm.
- ▶ Umschreiben in ein System erster Ordnung:
- ▶ $u = x, v = x'$

$$\begin{aligned}u' &= v \\v' &= \beta u - u^3 - \delta v.\end{aligned}$$

Stationäre Duffing-Gleichung

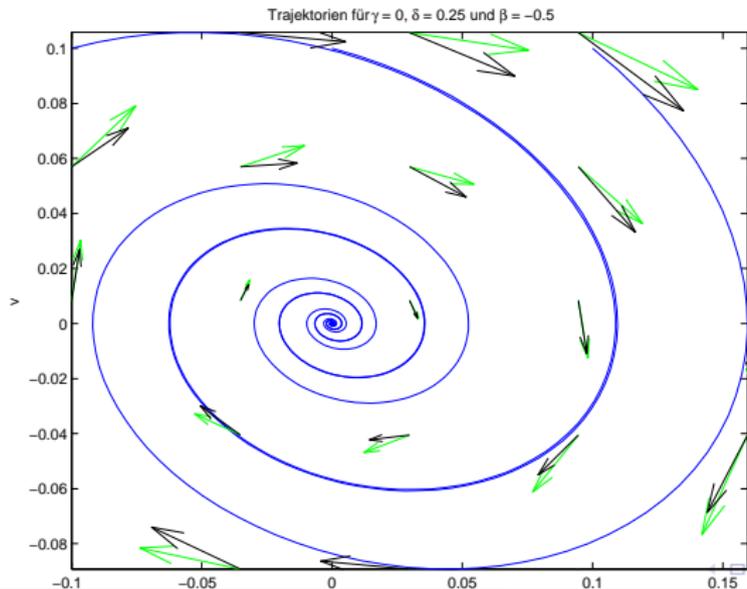
- ▶ Ruhelagen:

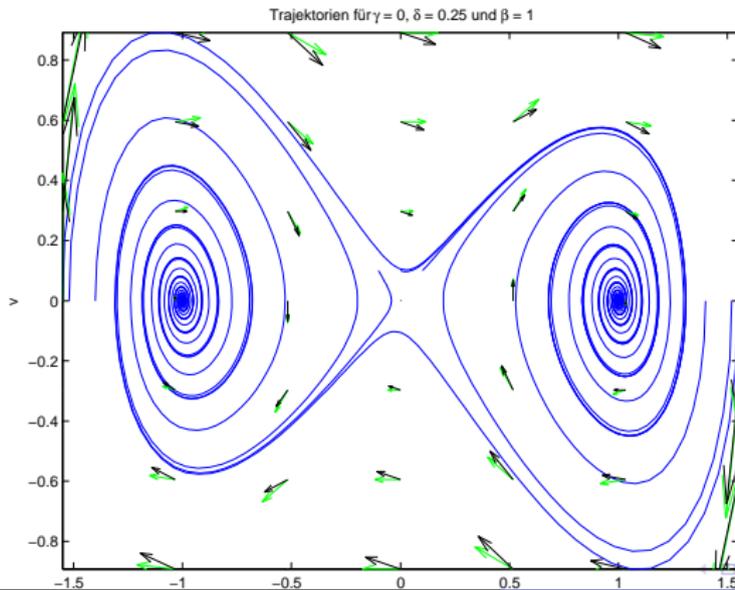
Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Ruhelagen:
- ▶ $(0, 0)$ für $\beta < 0$, d.h. „schwache“ Magnete

Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Ruhelagen:
- ▶ $(0, 0)$ für $\beta < 0$, d.h. „schwache“ Magnete
- ▶ $(-\beta^2, 0), (0, 0), (\beta^2, 0)$ für $\beta > 0$, d.h. „starke“ Magnete





Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Zum Vergleich der Fall ohne Reibung: $\delta = 0$:

Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Zum Vergleich der Fall ohne Reibung: $\delta = 0$:
- ▶ Mit $H(u, v) := \frac{v^2}{2} - \beta \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$ gilt:

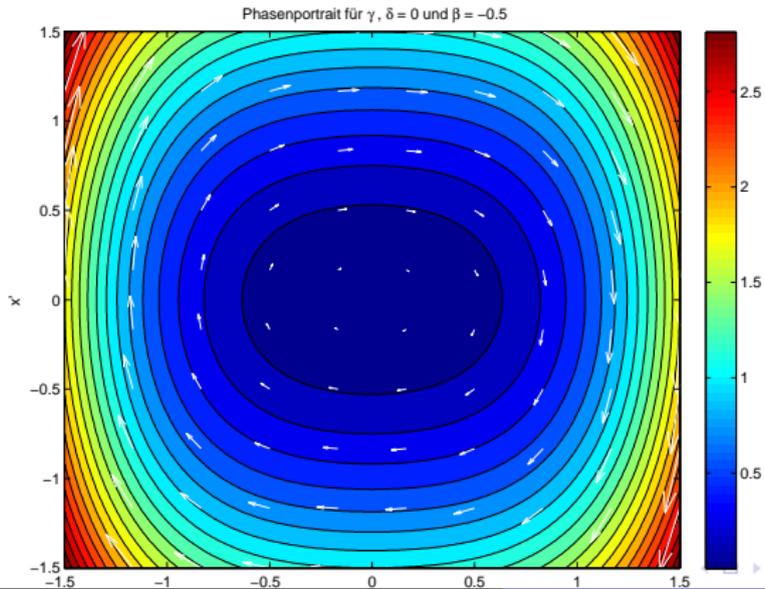
$$\begin{aligned}u' &= \partial_v H = v \\v' &= -\partial_u H = \beta u - u^3\end{aligned}$$

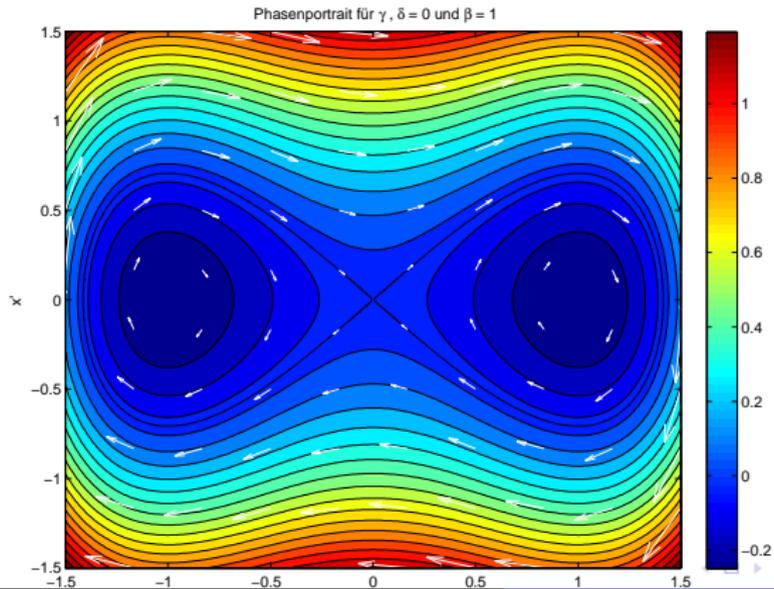
Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Zum Vergleich der Fall ohne Reibung: $\delta = 0$:
- ▶ Mit $H(u, v) := \frac{v^2}{2} - \beta \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$ gilt:

$$\begin{aligned}u' &= \partial_v H = v \\v' &= -\partial_u H = \beta u - u^3\end{aligned}$$

- ▶ Das System ist also Hamilton'sch.



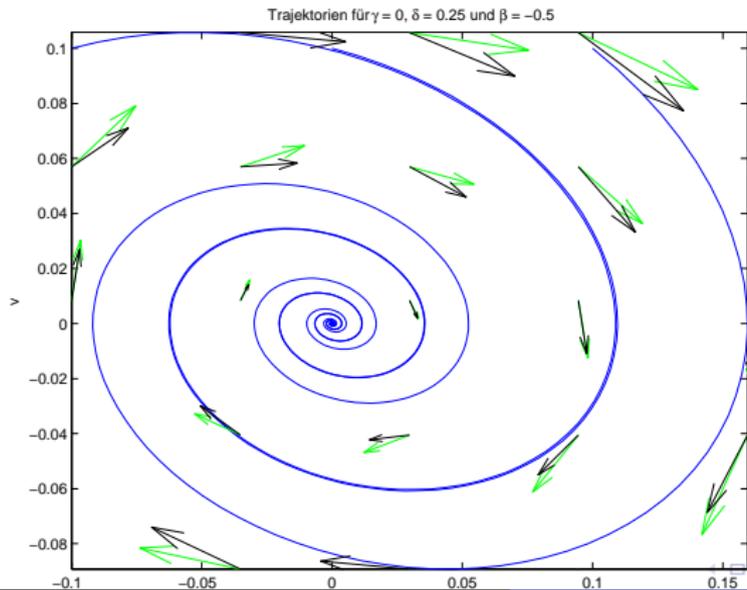


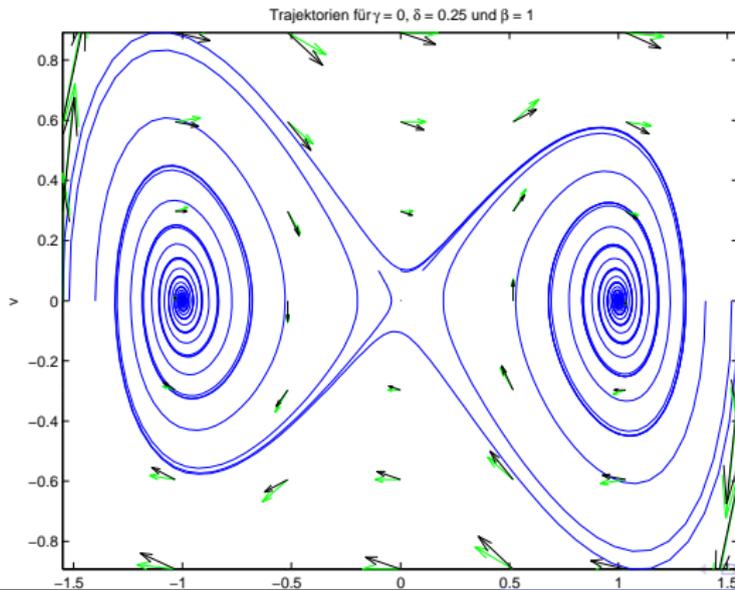
Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Wirkung der Reibung:

Stationäre Duffing-Gleichung

- ▶ Wirkung der Reibung:
- ▶ Das Geschwindigkeitsfeld wird nach „innen“ gedreht.





Vollständige Duffing-Gleichung

► $\beta = 1, \theta = t$

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ $\beta = 1, \theta = t$
- ▶ Wir erhalten ein autonomes System:

$$\begin{aligned}u' &= v \\v' &= u - u^3 - \delta v + \gamma \cos(\omega \theta) \\ \theta' &= 1\end{aligned}$$

für $(u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Hyperebene im Phasenraum:
 $S = \{(u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid \theta = 0\}.$

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Hyperebene im Phasenraum:
 $S = \{(u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid \theta = 0\}.$
- ▶ Poincaré Abbildung: $P_\gamma : S \longrightarrow S$

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Hyperebene im Phasenraum:
 $S = \{(u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid \theta = 0\}.$
- ▶ Poincaré Abbildung: $P_\gamma : S \longrightarrow S$
- ▶ $P_0 = \text{Zeit-}\frac{2\pi}{\omega}$ Abbildung

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Erklärungsansatz für das komplexes Verhalten: invariante Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunkts p nahe $(0, 0)$.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Erklärungsansatz für das komplexes Verhalten: invariante Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunkts p nahe $(0, 0)$.
- ▶ $W^s(p) = \{(u, v) \mid d(P_\gamma^n(u, v), p) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\}$
- ▶ $W^u(p) = \{(u, v) \mid d(P_\gamma^{-n}(u, v), p) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\}$

siehe dazu Abbildung in [Guckenheimer, Holmes]

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Sei B der Abschluß einer offenen Menge in S mit der Eigenschaft $P_\gamma^n(B) \subset B$ für $n > 0$.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Sei B der Abschluß einer offenen Menge in S mit der Eigenschaft $P_\gamma^n(B) \subset B$ für $n > 0$.
- ▶ Weiter sei $A_\gamma = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_\gamma^n(B)$.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Divergenz der Duffing-Gleichung:

$$\partial_u(v) + \partial_v(u - u^3 - \delta v + \gamma \cos(\omega\theta)) + \partial_\theta(1) = -\delta$$

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Divergenz der Duffing-Gleichung:

$$\partial_u(v) + \partial_v(u - u^3 - \delta v + \gamma \cos(\omega\theta)) + \partial_\theta(1) = -\delta$$

- ▶ Der Fluss und damit P_γ kontrahieren also Volumen.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Divergenz der Duffing-Gleichung:

$$\partial_u(v) + \partial_v(u - u^3 - \delta v + \gamma \cos(\omega\theta)) + \partial_\theta(1) = -\delta$$

- ▶ Der Fluss und damit P_γ kontrahieren also Volumen.
- ▶ A_γ ist also eine Nullmenge im \mathbb{R}^2 .

siehe dazu Abbildung in [Guckenheimer, Holmes]

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Vermutung: $A_\gamma = \overline{W^u(p)}$

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Vermutung: $A_\gamma = \overline{W^u(p)}$
- ▶ Annahme: γ „hinreichend“ klein.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Vermutung: $A_\gamma = \overline{W^u(p)}$
- ▶ Annahme: γ „hinreichend“ klein.
- ▶ Poincaré-Bendixson: alle Orbits für Punkte $x \in B - W^s(p)$ streben gegen eine der asymptotischen Ruhelagen

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Vermutung: $A_\gamma = \overline{W^u(p)}$
- ▶ Annahme: γ „hinreichend“ klein.
- ▶ Poincaré-Bendixson: alle Orbits für Punkte $x \in B - W^s(p)$ streben gegen eine der asymptotischen Ruhelagen
- ▶ A_γ enthält also die Ruhelagen.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Idee: Verbinde $x \in W^s(p)$ mit $y \in B$ durch eine Kurve.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Idee: Verbinde $x \in W^s(p)$ mit $y \in B$ durch eine Kurve.
- ▶ x strebt gegen p und y gegen eine der stabilen Ruhelagen.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Idee: Verbinde $x \in W^s(p)$ mit $y \in B$ durch eine Kurve.
- ▶ x strebt gegen p und y gegen eine der stabilen Ruhelagen.
- ▶ Aus dem Satz über Graphen-Transformation folgt das

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Idee: Verbinde $x \in W^s(p)$ mit $y \in B$ durch eine Kurve.
- ▶ x strebt gegen p und y gegen eine der stabilen Ruhelagen.
- ▶ Aus dem Satz über Graphen-Transformation folgt das
- ▶ alle Punkte der Kurve gegen Punkte aus $W^u(p)$ konvergieren.

Vollständige Duffing-Gleichung

- ▶ Für große γ ist die Aussage noch nicht bewiesen.

Literatur

- ▶ John Guckenheimer, Philip Holmes, „Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields“, Springer Verlag