Die Melnikov Methode

Paul Platenius

30.05.2006

- Im Folgenden betrachten wir das System:
- $\dot{x} = f(x) + \epsilon \cdot g(x,t), \; x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

- Im Folgenden betrachten wir das System:
- $\dot{x} = f(x) + \epsilon \cdot g(x,t),\ x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- f sei Hamiltonsch und g periodisch in t mit Periode T
- $f, g \in C^2$ auf einer offenen beschränkten Menge

- Zusätzliche Annahmen für $\epsilon = 0$:

- Zusätzliche Annahmen für $\epsilon = 0$:
- hyperbolische Ruhelage p_0

- Zusätzliche Annahmen für $\epsilon = 0$:
- hyperbolische Ruhelage p_0
- homoklines Orbit $q_0(t)$, d.h. $q_0(t) \longrightarrow p_0$ für $t \longrightarrow \infty$ bzw. $t \longrightarrow -\infty$

- Erweiterung zum autonomen System:

- Erweiterung zum autonomen System:
- $$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \epsilon \cdot g(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= 1,\ \theta \in S^1\end{aligned}$$

- Was bedeuten die Zusatzannahmen für das erweiterte System ($\epsilon = 0$)?

- Was bedeuten die Zusatzannahmen für das erweiterte System ($\epsilon = 0$)?
- die Ruhelage wird ein hyperbolischer periodischer Orbit: $\gamma_0(t) = (p_0, t + \theta_0)$

- Was bedeuten die Zusatzannahmen für das erweiterte System ($\epsilon = 0$)?
- die Ruhelage wird ein hyperbolischer periodischer Orbit: $\gamma_0(t) = (p_0, t + \theta_0)$
- für den Orbit $\omega_0(t) = (q_0(t), t + \theta_0)$ gilt: $\mathrm{dist}(\omega_0(t), \gamma) \to 0$ für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$

- Fragen (für $\epsilon > 0$):

- Fragen (für $\epsilon > 0$):
- hat das gestörte System auch einen hyperbolischen periodischen Orbit γ_ϵ?

- Fragen (für $\epsilon > 0$):
- hat das gestörte System auch einen hyperbolischen periodischen Orbit γ_ϵ?
- gibt es dazu einen Orbit ω_ϵ mit der Eigenschaft $\mathrm{dist}(\omega_\epsilon(t), \gamma_\epsilon) \to 0$ für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$?

- Antworten:

- Antworten:
- zur 1.Frage: ja, für hinreichend kleine ϵ

- Antworten:
- zur 1.Frage: ja, für hinreichend kleine ϵ
- zur 2.Frage: liefert die Melnikov Methode...

- Lemma: Für hinreichend kleines ϵ hat die Gleichung einen eindeutigen hyperbolischen periodischen Orbit $\gamma_\epsilon(t) = (p_0 + \mathrm{O}(\epsilon), t + \theta_0)$.

- Beweis:

- Beweis:
- globaler transversaler Schnitt
  $\Sigma^{t_0} = \{(x, t) | t = t_0 \in [0, T]\} \subset \mathbb{R} \times S^1$

- Beweis:
- globaler transversaler Schnitt
  $\Sigma^{t_0} = \{(x,t) | t = t_0 \in [0,T]\} \subset \mathbb{R} \times S^1$
- Poincaré-Abbildung $P_\epsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} \longrightarrow \Sigma^{t_0}$

- Beweis:
- globaler transversaler Schnitt
  $\Sigma^{t_0} = \{(x,t) | t = t_0 \in [0,T]\} \subset \mathbb{R} \times S^1$
- Poincaré-Abbildung $P_\epsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} \longrightarrow \Sigma^{t_0}$
- $P_0^{t_0}$ einen hyperbolischen Fixpunkt p_0

- betrachte $h_\epsilon = \mathrm{Id} \; - P_\epsilon^{t_0}(p_0)$

- betrachte $h_\epsilon = \mathrm{Id} \; - P_\epsilon^{t_0}(p_0)$
- offenbar gilt $h_0(p_0) = 0$
- da $1 \notin \mathrm{spec}(\mathrm{D}P_0^{t_0}(p_0))$ ist $\mathrm{D}h_0(p_0)$ invertierbar

- betrachte $h_\epsilon = \mathrm{Id} \; - P_\epsilon^{t_0}(p_0)$
- offenbar gilt $h_0(p_0) = 0$
- da $1 \notin \mathrm{spec}(\mathrm{D}P_0^{t_0}(p_0))$ ist $\mathrm{D}h_0(p_0)$ invertierbar
- und nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine glatte Kurve $(p_\epsilon^{t_0}, \epsilon)$ aus Fixpunkten die durch $(p_0, 0)$ läuft

- Fragen (für $\epsilon > 0$):
- hat das gestörte System auch einen hyperbolischen periodischen Orbit γ_ϵ?

- Fragen (für $\epsilon > 0$):
- hat das gestörte System auch einen hyperbolischen periodischen Orbit γ_ϵ?
- gibt es dazu einen Orbit ω_ϵ mit der Eigenschaft $\text{dist}(\omega_\epsilon(t), \gamma_\epsilon) \to 0$ für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$?

- Melnikov Funktion:

- Melnikov Funktion:
- $M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0)dt$

- Melnikov Funktion:
- $M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0) dt$
- Theorem: Hat M einfache Nullstellen und ist unabhängig von ϵ, dann schneiden sich für hinreichend kleines ϵ die Mannigfaltigkeiten $W^u(p_\epsilon^{t_0})$ und $W^s(p_\epsilon^{t_0})$ transversal. Hat M keine Nullstellen, dann gilt $W^u(p_\epsilon^{t_0}) \cap W^s(p_\epsilon^{t_0}) = \emptyset$.

- Beispiel: Duffing-Gleichung

- Beispiel: Duffing-Gleichung
- $$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 + \epsilon \cdot (\gamma \cdot \cos(\omega t) - \delta \cdot v) \end{aligned}$$

- Beispiel: Duffing-Gleichung
- $$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 + \epsilon \cdot (\gamma \cdot \cos(\omega t) - \delta \cdot v) \end{aligned}$$
- γ Amplitude der Störung, δ Reibungsparameter

- Vorraussetzungen ($\epsilon = 0$):

- Vorraussetzungen ($\epsilon = 0$):
- hyperbolische Ruhelage in (0, 0)

- Vorraussetzungen ($\epsilon = 0$):
- hyperbolische Ruhelage in (0, 0)
- homokliner Orbit $q_0^{+,-}$ mit Anfangswert $q_0^{+,-}(0) = (+,-\sqrt{2},0)$ und Darstellung $q_0^+(t) = (\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cosh(t)}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cosh(t)}\cdot\tanh(t)), q_0^-(t) = q_0^+(t)$

- $M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0)dt$

- $M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0) dt$
- $M(t_0, \gamma, \delta, \omega) = -\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \omega \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{\pi\omega}{2})} \cdot \sin(\omega t_0)$

- $M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0) dt$
- $M(t_0, \gamma, \delta, \omega) = -\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \omega \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{\pi\omega}{2})} \cdot \sin(\omega t_0)$
- für $\frac{\delta}{\gamma} < \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \omega}{4 \cdot \cosh(\frac{\pi \cdot \omega}{2})} =: \frac{1}{R}$ hat M eine einfache Nullstelle

- $M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0)dt$
- $M(t_0, \gamma, \delta, \omega) = -\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \omega \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{\pi\omega}{2})} \cdot \sin(\omega t_0)$
- für $\frac{\delta}{\gamma} < \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \omega}{4 \cdot \cosh(\frac{\pi \cdot \omega}{2})} =: \frac{1}{R}$ hat M eine einfache Nullstelle
- für $\frac{\delta}{\gamma} > \frac{1}{R}$ ist $M(t_0) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

- Beispiel 2: gedämpftes Pendel

- Beispiel 2: gedämpftes Pendel
- $$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -sin(\theta) + \epsilon \cdot (\alpha - \delta v), \;\; \alpha, \delta \geq 0 \end{aligned}$$

- Beispiel 2: gedämpftes Pendel
- $$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -sin(\theta) + \epsilon \cdot (\alpha - \delta v), \ \alpha, \delta \geq 0 \end{aligned}$$
- homokline Orbits:
  $(\theta^0_{+,-}; v^0_{+,-}) = (+, -2 \cdot \mathrm{arctan}(\sinh(t)); +, -2 \cdot \frac{1}{\cosh(t)})$

- Beispiel 2: gedämpftes Pendel
- $$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -sin(\theta) + \epsilon \cdot (\alpha - \delta v), \ \alpha, \delta \geq 0 \end{aligned}$$
- homokline Orbits:
  $(\theta^0_{+,-}; v^0_{+,-}) = (+, -2 \cdot \text{arctan}(\text{sinh}(t)); +, -2 \cdot \frac{1}{\text{cosh}(t)})$

- $M^{+}(\alpha, \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{+}^{0}(t) \cdot [\alpha - \delta \cdot v_{+}^{0}(t)]dt = 2 \cdot \pi \cdot \alpha - 8 \cdot \delta$

- $M^+(\alpha, \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} v_+^0(t) \cdot [\alpha - \delta \cdot v_+^0(t)]dt = 2 \cdot \pi \cdot \alpha - 8 \cdot \delta$
- analog $M^-(\alpha, \delta) = -2 \cdot \pi \cdot \alpha - 8 \cdot \delta$

- $M^+(\alpha,\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} v_+^0(t) \cdot [\alpha - \delta \cdot v_+^0(t)]dt = 2 \cdot \pi \cdot \alpha - 8 \cdot \delta$
- analog $M^-(\alpha,\delta) = -2 \cdot \pi \cdot \alpha - 8 \cdot \delta$
- für $\alpha \neq \frac{4 \cdot \delta}{\pi}$ gilt $M(t_0) > 0$ bzw. $M(t_0) < 0 \; \forall t_0 \in \mathbb{R}$

- für $\alpha = \frac{4 \cdot \delta}{\pi}$ ist $M(t_0) = 0$

- für $\alpha = \frac{4 \cdot \delta}{\pi}$ ist $M(t_0) = 0$
- Nullstelle ist nicht einfach

- Ausblick:

- Ausblick:
- f braucht nicht hamiltonsch zu sein

- Ausblick:
- f braucht nicht hamiltonsch zu sein
- zusätzliche Annahme: homokliner Orbit umschliesst periodische Orbits

- Ausblick:
- f braucht nicht hamiltonsch zu sein
- zusätzliche Annahme: homokliner Orbit umschliesst periodische Orbits
- Frage: Unter welchen Bedingungen bleibt einer dieser periodischen Orbits unter Störungen erhalten?