Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Sei $u = u(t)$ eine Funktion, welche die Gleichung der **Halbwertszeit** erfüllt: Es gibt ein $\tau > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(t+\tau) = \frac{1}{2}u(t).$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $u = u(t)$ die Differentialgleichung $\frac{du(t)}{dt} = C \cdot u(t)$ löst.

Lösung:
Die Frage ist, ob es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Funktion u, welche die Gleichung der Halbwertzeit erfüllt, die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C \cdot u$ erfüllt. Es gibt im Allgemeinen kein solches C, denn z.B. die stetig differenzierbare Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) & \text{für } t \in [0, \tau) \\ \frac{1}{2^n}u(t - n\tau) & \text{für } t \in [n\tau, (n+1)\tau), \, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

erfüllt die Gleichung der Halbwertzeit, jedoch nicht die Differentialgleichung: Sei $t \in [0, \tau)$. Dann gilt:

$$u(t+\tau) = \frac{1}{2}u(t)$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{2\pi}{\tau}\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \neq C \cdot u(t).$$

Aufgabe 2:
a) Lösen Sie die Gleichungen

- $u' = u^2 + 1$
- $u' = -\frac{x^2}{u^3}$
- $u' = e^u \sin(x)$

mittels Trennung der Variablen.

Lösung:

- $$u' = u^2 + 1$$
  $$\Leftrightarrow u = \tan(x - x_0 + \arctan(u_0))$$

- $$u' = -\frac{x^2}{u^3}$$
$$\Leftrightarrow u = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}\left(x_0^3 - x^3\right) + u_0^4}$$
- $$u' = \exp(u)\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow u = -\ln\left(\cos(x) - \cos(x_0) + \exp(-u_0)\right)$$

b) Diskutieren Sie das Verhalten dieser Lösungen mit $u(0) = p_0,\ p_0 \in \mathbb{R}$:

- Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?
- Wie verhält sich die Lösung für $t \to t_+,\ t \to t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnet, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Lösung:
Mit $u(0) = p_0$ ergibt sich

- $u = \tan\left(x + \arctan(p_0)\right)$
- $u = \pm\sqrt[4]{p_0^4 - \frac{4}{3}x^3} = \text{sign}(p_0)\sqrt[4]{p_0^4 - \frac{4}{3}x^3}$
- $u = -\ln\left(\cos(x) + \exp(-p_0) - 1\right)$

Die maximalen Existenzintervalle ergeben sich zu

- $\left(-\arctan(p_0) - \frac{\pi}{2}, -\arctan(p_0) + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}p_0^4}\right)$
- Es muss $\cos(x) > -\exp(-p_0) + 1$ gelten. Für $p_0 < -\ln 2$ ergibt sich als max. Existenzintervall $(-\infty, \infty)$, für $p_0 \geq -\ln 2$ folgt $|x| < \arccos(-\exp(-p_0) + 1)$, also
$$\left(-\arccos\left(1 - \exp(-p_0)\right), \arccos\left(1 - \exp(-p_0)\right)\right).$$

Für die Grenzwerte $t \to t_+$ bzw. $t \to t_-$ ergibt sich

- $u \xrightarrow{t \to t_+} \infty$ und $u \xrightarrow{t \to t_-} -\infty$
- $u \xrightarrow{t \to t_+} 0$ und $u \xrightarrow{t \to t_-} \infty$
- Für $p_0 < -\ln 2$ ist u divergent für $t \to \pm\infty$,
  sonst gilt $u \xrightarrow{t \to t_+} \infty$ und $u \xrightarrow{t \to t_-} \infty$.

Aufgabe 3:
Sei $f : (X, d) \to (X, d)$ eine starke Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\lambda < 1$. Der Fixpunkt von f heiße $\bar{x}$. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung:
$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1).$$

Lösung:
Es gilt offensichtlich $d(f^n(x), f^n(x)) \leq \lambda^n d(x,y)$, und damit ist:

$$\begin{aligned} d(x_n, \bar{x}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, \bar{x}) \\ &= d(f^n(x_0), f^n(x_1)) + d(f(x_n), f(\bar{x})) \\ &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) + \lambda d(x_n, \bar{x}) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} (1-\lambda) d(x_n, \bar{x}) &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) \\ \iff d(x_n, \bar{x}) &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4:
Sei $\varphi \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ und sei die Abbildung T definiert durch

$$T : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to C([0,1], \mathbb{R}^n),$$
$$u \mapsto \int_0^1 \varphi(., y) u(y) dy.$$

Zeigen Sie: T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Lösung:
Behauptung : T ist linear und stetig, für $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ ist T eine Kontraktion.
Beweis:
Offensichtlich ist T linear. Zunächst zur behaupteten Kontraktionseigenschaft:
Auf $C([0,1], \mathbb{R}^n)$ definieren wir die Norm:

$$\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i\|_\infty$$

und betrachten:

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\| = \|T(u-v)\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \|(T(u-v))_i\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in [0,1]} \mid \int_0^1 (\varphi(x,y)(u-v)(y))_i dy \mid \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \mid (\varphi(x,y)(u-v)(y))_i \mid dy \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \mid \varphi(x,y) \mid \cdot \mid (u-v)_i(y) \mid dy \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \mid \varphi(x,y) \mid \cdot \|(u-v)_i\|_\infty dy \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \mid \varphi(x,y) \mid dy \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \|(u-v)_i\|_\infty \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|(u-v)\| \end{aligned}$$

Für $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ ist T also eine Kontraktion. Insbesondere ist wegen $\|\varphi\|_\infty \leq \infty$ die Abbildung T lipschitzstetig und damit auch stetig. $\square$