Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2 - t^2, \qquad y(0) = 1$$

durch formalen Potenzreihenansatz

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.$$

D.h. setzen Sie die formale Potenzreihe in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie die a_i durch Koeffizientenvergleich.

Lösung:
Bestimme eine mögliche Lösung des gegebenen AWP durch formalen Potenzreihenansatz.

$$y\left(t\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(i+1\right) a_{i+1} t^i, \text{ durch gliedweise Differtiation.}$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $a_0 = 1$. Einsetzen von y in die DGL ergibt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(i+1\right) a_{i+1} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} \right) t^i - t^2$$

Damit errechnen sich die ersten Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 = 1 \\ a_2 &= \frac{a_0 a_1 + a_1 a_0}{2} = 1 \\ a_3 &= \frac{2a_2 a_0 + a_1^2 - 1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Für alle weiteren Koeffizienten ($i \geq 3$) gilt die Rekursion

(1) $$a_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j}}{i+1}$$

□

Aufgabe 2:
Zeigen Sie per Induktion: $|a_i| \leq 1$ für alle i. Schließen Sie daraus, dass Ihre formale Potenzreihenlösung eine wirkliche Lösung für $t \in (-1, 1)$ ist.

Lösung:
Offensichtlich gilt $a_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da in der Rekursion (1) nur positive Zahlen

aufsummiert werden und durch eine positive Zahl geteilt werden. Wie wir oben gesehen haben, gilt $|a_i| \leq 1$ für $i < 3$. Weiter gilt induktiv

$$|a_i| = a_i = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} a_j a_{i-1-j}}{i} \leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j a_{i-1-j}}{i} \leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Um zu zeigen, dass y eine wirkliche Lösung ist, zeigen wir die absolute Konvergenz mit dem Wurzelkriterium für Reihen. Es gilt

$$|a_i t^i| \leq a_i |t|^i \leq |t|^i < 1 \, \forall i \in \mathbb{N}_0, t \in (-1, 1)$$

Es ist also

$$\limsup \sqrt[i]{|a_i t^i|} \leq \limsup \sqrt[i]{|t|^i} = \limsup |t| < 1,$$

womit unsere Potenzreihe absolut konvergiert (für $t \in (-1, 1)$) und eine wirkliche Lösung ist. $\square$

Aufgabe 3:
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Das Euler-Verfahren bei einer Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y)$$

liefert korrekte Werte für alle Schrittweiten $\varepsilon > 0$ dann und nur dann, wenn f konstant ist. Hierbei heißen die Werte korrekt, wenn zu gegebenen Anfangsdaten (t_0, y_0) alle mit dem Euler-Verfahren iterierten Punkte auf der echten Lösung des Anfangswertproblems liegen. Machen Sie dabei die (unrealistische) Annahme, dass der Computer keine Rundungsfehler macht.

Lösung:
Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{dt}} = f(y), \; y(0) = y_0$$

mit einem stetigen Vektorfeld $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ existiere eine eindeutige Lösung $y(t)$ des AWP für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Weiter bezeichne

$$\varphi_k^\epsilon, \; k \in \mathbb{N}$$

für die Schrittweite $\epsilon > 0$ das Ergebnis der k-ten Iteration des Euler-Verfahrens. Es gilt die Behauptung:

Alle Schritte des Verfahrens liefern korrekte Werte für alle Schrittweiten genau dann, wenn f konstant ist.

Beweis:

Zunächst erfülle das Verfahren die angegebene Bedingung. Sei nun f nicht konstant, dann gibt es $v, w \in \mathbb{R}$ mit $f(v) \neq f(w)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man auch $v < w$ annehmen, denn dies kann man durch vertauschen der Rollen von v und w immer erreichen. Wegen dem Zwischenwertsatz kann man sogar $f(v) \neq 0$ annehmen. Nun betrachtet man das Euler-Verfahren mit Anfangswert v und Schrittweite

$$\epsilon = \frac{2 \cdot (w - v)}{f(v)}.$$

Offenbar gilt

$$\varphi_1^\epsilon = \varphi_0^\epsilon + \epsilon \cdot f(\varphi_0^\epsilon) = v + \epsilon \cdot f(v).$$

Halbiert man die Schrittweite, so wird der gleiche Punkt erst in der 2. Iteration erreicht. Da das Verfahren nach Vorraussetzung für alle Schrittweiten korrekte Werte liefert, folgt:

$$\varphi_1^\epsilon = \varphi_2^{\frac{\epsilon}{2}} = \varphi_1^{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(\varphi_1^{\frac{\epsilon}{2}}) = \varphi_0^{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(\varphi_0^{\frac{\epsilon}{2}}) + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(\varphi_0^{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(\varphi_0^{\frac{\epsilon}{2}})).$$

Also weiter

$$v + \epsilon \cdot f(v) = v + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(v) + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(v + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(v)),$$

und damit

$$f(v) = f(v + \frac{\epsilon}{2} \cdot f(v)).$$

Durch einsetzen von ϵ erhält man dann

$$f(v) = f(v + (w - v)) = f(w)$$

im Widerspruch zur Annahme.

Sei nun f konstant, etwa $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. In diesem Fall ist die Lösung durch

$$y(t) = y_0 + c \cdot t$$

gegeben. Die Behauptung folgt nun per Induktion. Aus der Verfahrensvorschrift und der Annahme das keine Rundungsfehler auftreten erhält man zunächst den Induktionsbeginn:

$$\varphi_0^\epsilon = y_0 = y(0).$$

Nun sei die Behauptung für $k-1$ bereits bewiesen. Dann ist

$$\varphi_k^\epsilon = \varphi_{k-1}^\epsilon + \epsilon \cdot f(\varphi_{k-1}^\epsilon) = y((k-1) \cdot \epsilon) + \epsilon \cdot c = y_0 + (k-1) \cdot \epsilon \cdot c + \epsilon \cdot c,$$

also

$$\varphi_k^\epsilon = y_0 + k \cdot \epsilon \cdot c = y(k \cdot \epsilon),$$

wie behauptet. □

Aufgabe 4:
Finden Sie irgendeine Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y),$$

wobei f nicht konstant ist, irgendeine Schrittweite $\varepsilon > 0$ und irgendwelche Anfangsdaten (t_0, y_0), so dass das Euler-Verfahren korrekte Werte liefert.

Lösung:
Behauptung:

Sei $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $y_0 = 0$ und $\epsilon = 1$. Dann liefern alle Iterationen des Euler-Verfahrens korrekte Werte.

Beweis per Induktion:

Zunächst ist klar, das die Lösung des AWP durch die konstante Funktion $y(t) = 0$ gegeben ist. Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 3 ist also $\varphi_k^1 = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Natürlich ist

$$\varphi_0^1 = y_0 = 0.$$

Sei die Behauptung nun für $k-1$ bereits gezeigt, dann gilt offenbar

$$\varphi_k^1 = \varphi_{k-1}^1 + f(\varphi_{k-1}^1) = 0 + f(0) = 0,$$

wie behauptet. $\square$