Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Die Differentialgleichung

$$\frac{du(t)}{dt} = -(u(t))^2 + u(t) + 2u(t)t^2 + 2t - t^2 - t^4$$

hat eine Lösung

$$u(t) = 1 + t^2.$$

Lösung:
Sei $u(t) := 1 + t^2$. Dann ist $\dot{u} = 2t$ und

$$\begin{aligned} f(u) &= -(u)^2 + u + 2ut^2 + 2t - t^2 - t^4 \\ &= -\left(1+t^2\right)^2 + \left(1+t^2\right) + 2\left({}^{+}t^2\right)t^2 + 2t - t^2 - t^4 \\ &= -1 - 2t^2 - t^4 + 1 + t^2 + 2t^2 + 2t^4 + 2t - t^2 - t^4 \\ &= 2t = \dot{u}(t), \end{aligned}$$

also ist u eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung. □

b) Zeigen Sie: Wenn $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist mit Anfangswert $\tilde{u}(0) < 1$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $\tilde{u}(t) < 1 + t^2$.

Lösung:
Ist $\tilde{u}$ eine weitere Lösung dieser Differentialgleichung, dann gilt $\tilde{u} < 1 + t^2 = u$ wegen $\tilde{u}(t=0) < 1 = u(t=0)$ und der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung. □

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: $u_1(t) \equiv 0$ und $u_2(t) = \frac{1}{27}t^3$ sind Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{du}{dt} = u^{2/3}, \qquad u(0) = 0.$$

Diese Lösungen sind verschieden. Warum ist dies kein Widerspruch zum Existenz-Eindeutigkeits-Satz?

Lösung:
Dass dies Lösungen sind, sehen wir durch Differenzieren. □

$u^{2/3}$ ist in Null nicht Lipschitz-stetig, erfüllt dort also nicht die Voraussetzungen für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Aufgabe 3:
Ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{du}{dt} = u^{2/3}, \qquad u(0) = 1$$

für $t \geq 0$ eindeutig? Läßt sie sich auf ganz $[0, \infty)$ fortsetzen? Beweisen Sie Ihre Aussagen. Tipp: Zeigen Sie: $u(t) \geq 1$ für alle $t \geq 1$.

Lösung:
Behauptung:

Das Anfangswertproblem

$$\frac{du(t)}{dt} = u^{1/3}, \; u(0) = 1$$

besitzt eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung, die für $t \geq 0$ auch eindeutig ist.

Beweis:

Zunächst erhält man eine Lösung mittels Trennung der Veränderlichen. Es gilt

$$\frac{du(t)}{dt} \cdot u^{-2/3} = 1$$

für $u \neq 0$. Integration von 0 bis t liefert

$$\int_0^t \frac{du(t)}{dt} \cdot u^{-2/3} \, dt = \int_0^t 1 \, dt,$$

also

$$\int_{u(0)}^{u(t)} u^{-2/3} \, du = t$$

und damit schließlich

$$3 \cdot u(t)^{1/3} - 3 = t.$$

Auflösen ergibt

$$u(t) = \frac{1}{27} \cdot (t+3)^3$$

für $t \in (-3, \infty)$. Diese Funktion lässt sich durch $u(t) := 0$ für $t \in (-\infty, -3]$ zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösung fortsetzen. Offensichtlich besitzt u im Punkt -3 den rechtsseitigen Grenzwert 0, die Fortsetzung ist also stetig. Das selbe gilt für $u' = \frac{1}{9} \cdot (t+3)^2$ und $u'' = \frac{2}{9} \cdot (t+3)$, die Fortsetzung ist also sogar stetig differenzierbar und damit eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

Die Eindeutigkeit erhält man durch die folgenden Überlegungen. Offenbar ist $u(t)$ wegen $u' \geq 0$ monoton und aus $u(0) = 1$ folgt damit auch $u(t) > 1$ für alle $t > 0$. f ist auf jedem Intervall $(1 - \epsilon, \infty)$ für $0 < \epsilon < 1$ stetig differenzierbar also lokal Lipschitz-stetig und nach dem Eindeutigkeitssatz ist unsere Lösung für $t \geq 0$ deshalb eindeutig. $\square$

Aufgabe 4:
a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} = u^3, \qquad u(0) = 1.$$

Finden Sie das maximale Existenzintervall der Lösung. Beschreiben Sie, wie sich die Lösung am Rand dieses Intervalls verhält und warum dieses Verhalten es unmöglich macht, die Lösung auf ein größeres Intervall fortzusetzen.

Lösung:
Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{du(t)}{dt} \cdot u^{-3} = 1$$

für $u \neq 0$. Integration von 0 bis t liefert

$$\int_0^t \frac{du(t)}{dt} \cdot u^{-3}\, dt = \int_0^t 1\, dt,$$

also

$$\int_{u(0)}^{u(t)} u^{-3}\, du = t$$

und damit schließlich

$$-\frac{1}{2} \cdot u(t)^{-2} + \frac{1}{2} = t.$$

Auflösen ergibt

$$u(t) = (-2 \cdot t + 1)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{-2 \cdot t + 1}}$$

für $t \in (-\infty, \frac{1}{2})$. Der Nenner geht für $t \to \frac{1}{2}$ gegen 0, d.h. $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} u(t) = \infty$ im Sinne uneigentlicher Konvergenz. Da u hier keinen Grenzwert besitzt, kann insbesondere keine stetige Fortsetzung nach rechts existieren. Damit ist gezeigt, dass das angegebene Definitionsintervall tatsächlich maximal ist.

b) Analog für

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{(u+1)(u-2)}, \qquad u(0) = 0.$$

Lösung:
Das maximale Existenzintervall läßt sich hier nicht so leicht finden (siehe Bemerkung in der Übung). Die Lösung läßt sich deshalb nicht weiter fortsetzen, weil sie unbeschränkt ist und jedes Kompaktum verläßt.