Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$5^{5^1} \cdot \frac{d^{127}u}{dt^{127}} + 5^{5^2} \cdot \frac{d^{126}u}{dt^{126}} + 5^{5^3} \cdot \frac{d^{125}u}{dt^{125}} + \cdots + 5^{5^{128}} \cdot u = \cos\left(\sin\left(e^{e^{\arctan(u)}}\right)^{13} \cos\left(2^{\sin\arctan t^{26}}\right)\right)$$

mit Anfangsdaten $\frac{d^{126}u}{dt^{126}}(0) = 1,\ \frac{d^{125}u}{dt^{125}}(0) = 2, \ldots,\ u(0) = 127$ hat auf einem Intervall $(-\delta, \delta)$ eine Lösung, und diese ist dort eindeutig.

Lösung:
Die rechte Seite ist überall glatt (und beschränkt). Also ist sie lokal Lipschitz-stetig in u und stetig in t. Damit gibt es nach Satz 2.3.5 eine eindeutige lokale Lösung auf einem Interval $(-\delta, \delta)$. $\square$

b) Finden Sie das maximale Existenzintervall der Lösung dieses Anfangswertproblems. Ist die Lösung dort eindeutig? (Begründung erforderlich.)

Lösung:
Behauptung: Die Löung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und dort eindeutig.

Beweis: Sei $f(u) \cdot g(t)$ die rechte Seite der Differentialgleichung. Es genügt zu zeigen, dass die Funktion $f = f(u)$ global Lipschitz-stetig und die Funktion $g = g(t)$ stetig ist.

Die Funktion g ist offensichtlich stetig, da sie Verkettung stetiger Funktionen ist.

Die Funktion f ist Verkettung von glatten Funktionen, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind und deshalb auf allen kompakten Intervallen Lipschitz-stetig sind. Die innerste Funktion $\arctan$ ist beschränkt, also gibt es ein kompaktes Intervall, in welchem alle Werte liegen (z.B. [-1,1] oder [-42,42]). Die Verkettung der anderen Funktionen, eingeschränkt auf dieses Intervall, ist Lipschitz-stetig. Außerdem ist $\arctan$ global Lipschitz-stetig. Somit ist $f(u)$ Lipschitz-stetig. $\square$

Vorsicht: Für die Lipschitz-Stetigkeit von f genügt nicht, dass f glatt und beschränkt ist, wie z.B. $f(u) = \cos(u^4)$ zeigt.

Aufgabe 2:
Auf der 2-Sphäre $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ ist ein Vektorfeld f definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \cos(7z^4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $\frac{du}{dt} = f(u), \quad u(t_0) = u_0 \in S^2$.

Lösung:
Für jede Lösung gilt: Die z-Komponente ist konstant. Damit ist auch der Vorfaktor $\cos(7z^4)$ konstant. Die Funktion f ist auf S^2 Lipschitz-stetig (auf $\mathbb{R}^n$ übrigens nicht). Deswegen ist jede Lösung für alle Zeiten definiert. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine typische Drehungsmatrix. Die Lösungen des AWP liegen also auf Kreisen auf der Sphäre S^2, die jeweils konstant in z sind. Der Nord- und Südpol sind hierbei Fixpunkte, ebenso Punkte auf Kreisen mit

$$z = \pm\sqrt{\pi/14} \text{ oder } z = \pm\sqrt{3\pi/14}.$$

Alle anderen Punkte sind nicht-fixe periodische Punkte, deren Orbit jeweils der gesamte Kreis von Punkten mit konstanter z-Koordinate ist. Die Umlaufrichtung ändert sich dabei bei jedem Vorzeichenwechsel von $\cos(z^4)$.

Aufgabe 3:
Sei f ein glattes Tangentialvektorfeld auf der 2-Sphäre S^2 mit Ruhelagen am Nord- und Südpol, d.h. $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$. Sei $c : [0,1] \to S^2$ eine stetige Kurve mit $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sei $\varphi : S^2 \times \mathbb{R} \to S^2$ der Lösungsfluss zur Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = f(u)$. Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet $\varphi_t(c([0,1]))$ den Äquator $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Lösung:
Zunächst stellen wir fest das der Fluss an den Polen Fixpunkte hat, es gilt $\forall t \in \mathbb{R}$, dass $\varphi_t((0,0,1)) = (0,0,1)$ und $\varphi_t((0,0,-1)) = (0,0,-1)$. Damit gilt also

$$\varphi_t(c(0)) = (0,0,1)$$

und

$$\varphi_t(c(1)) = (0,0,-1)$$

für alle t aus $\mathbb{R}$.
Wir betrachten nun für festes t die Abbildung :

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow h(x) = x_3 \circ \varphi_t \circ c(x) \end{aligned}$$

wobei x_3 die Projektion auf die dritte Komponente bezeichnet. Aufgrund des vorher gesagten gilt $h(0) = 1$ und $h(1) = -1$. Da h stetig ist, gibt es aufgrund des Zwischenwertsatzes ein $\bar{x} \in [0,1]$ mit $h(\bar{x}) = 0$, damit folgt

$$\varphi_t(c(\bar{x})) \in \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet $\varphi_t(c[0,1])$ also den Äquator. $\square$

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie alle Ruhelagen von $\frac{du}{dt} = (u-1)(u-2)(u-3)$ auf Poisson-/Lyapunov-Stabilität und auf asymptotische Stabilität.

Lösung:
In den Präsenzübungen haben wir folgenden Satz bewiesen:
Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\dot{x} = f(x)$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit einer Ruhelage x_0. Gilt:

- $f'(x_0) < 0$, so ist x_0 sowohl Poisson/Lyapunov-stabil als auch asymptotisch stabil;
- $f'(x_0) > 0$, so ist x_0 instabil (d.h. weder Poisson/Lyapunov-stabil noch asymptotisch stabil).

Anwendung dieses Satzes auf die in der Aufgabe gegebene Differentialgleichung:

$$\dot{u} = (u-1)(u-2)(u-3) = u^3 - 6u^2 + 11u - 6$$

bei den Ruhelagen $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ ergibt :

- $f'(1) = 2$, also ist u_1 instabil.
- $f'(2) = -1$, also ist u_2 stabil und asymptotisch stabil.
- $f'(3) = 2$, also ist u_3 instabil.