Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1:
a) Seien φ ein Fluss auf einer Menge X und ψ ein Fluss auf einer Menge Y. Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi \times \psi : X \times Y \times \mathbb{R} \to X \times Y$, genannt der **Produktfluss** von φ und ψ, definiert durch

$$(\varphi \times \psi)((x,y),t) := (\varphi(x,t), \psi(y,t)) \qquad \text{bzw. } (\varphi \times \psi)_t(x,y) := (\varphi_t(x), \psi_t(y))$$

ist ein Fluss auf der Menge $X \times Y$.

Lösung:
Für $\varphi \times \psi$ müssen die Flussaxiome nachgeprüft werden:

$$\begin{aligned}
(\varphi \times \psi)\left(\left(x,y\right),0\right) &= \left(\varphi\left(x,0\right),\psi\left(y,0\right)\right) \\
&= (x,y) \quad \text{und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi \times \psi)\left(\left(\varphi \times \psi\right)\left(\left(x,y\right),t\right),s\right) &= (\varphi \times \psi)\left(\left(\varphi\left(x,t\right),\psi\left(y,t\right)\right),s\right) \\
&= \left(\varphi\left(\varphi\left(x,t\right),s\right),\psi\left(\psi\left(y,t\right),s\right)\right) \\
&= \left(\varphi\left(x,t+s\right),\psi\left(y,t+s\right)\right) \\
&= (\varphi \times \psi)\left(\left(x,y\right),t+s\right)
\end{aligned}$$

Beide Axiome sind erfüllt, also ist $\varphi \times \psi$ ein Fluss. □

b) Beschreiben Sie den Produktfluss der Flüsse φ und ψ auf S^1, wobei

$$\begin{aligned}
\varphi_t(x) &= x + at \qquad \text{(mod 1)}, \\
\phi_t(x) &= x + bt \qquad \text{(mod 1)}
\end{aligned}$$

und $a, b \in \mathbb{R}$. Für welche a, b hat der Produktfluss periodische Punkte?

Lösung:
Der Produktfluss lautet

$$(\varphi \times \psi)_t(x,y) = (x + at, y + bt) \quad \text{mod } 1.$$

Der Fluss hat offensichtlich periodische Punkte, falls $a = 0$ oder $b = 0$. Sind $a, b \neq 0$, so hat der Fluss periodische Punkte für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. □

Aufgabe 2:
Sei φ der Lösungsfluss der (autonomen) Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion mit globaler Lipschitzschranke ist. Sei

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}.$$

Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_t(Q)$ eine Menge, welche genau 4 Ecken und ansonsten einen glatten Rand hat.

Lösung:
Da f glatt und global Lipschitz ist, ist u global eindeutig lösbar, d.h. auch der Fluss φ ist glatt und eindeutig. D.h. φ ist ein Diffeomorphismus, wegen $\varphi_0 = id$ sogar orientierungserhaltend. Ein Diffeomorphismus erhält die Glattheit aller Punkte, d.h. insbesondere, dass der Rand von $\varphi_t(Q)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die gleiche Anzahl Ecken hat, also 4. $\square$

Aufgabe 3:
Seien φ und Q wie in Aufgabe 2. Nehmen Sie weiterhin an, dass gilt: $\varphi_1(Q) = Q$.

a) Welche Werte kann $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ annehmen? Konstruieren Sie für jeden möglichen Wert eine Funktion f, so dass dieser Wert angenommen wird.

Lösung:
Wie in Aufgabe 2 gezeigt, werden Ecken wieder auf Ecken abgebildet. Mit der Zusatzvorraussetzung $\varphi_1(Q) = Q$ kann $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ nur die Werte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

annehmen. Wir betrachten das Vekorfeld:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ay \\ \dot{y} &= -ax \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Es gilt $\varphi_t(0,1) = (\sin(at), \cos(at))$. Dann ist für:

$$\begin{aligned} a = 0 \text{ oder } 2\pi : &\qquad \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ a = \frac{3}{2}\pi : &\qquad \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a = \pi : &\qquad \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ a = \frac{1}{2}\pi : &\qquad \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Wenn Sie wissen, dass $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, welche Werte kann $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ dann annehmen? (Mit Beweis.)

Lösung:
Wir wissen

$$\varphi_1(Q) = Q$$

nach Annahme. Wir wissen, dass

$$\varphi_1(\partial Q) = \partial Q,$$

weil dies für einen Homöomorphismus immer gilt. Wir wissen auch

$$\varphi_1\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Weiterhin ist φ_1 orientierungserhaltend, d.h. $\det d\varphi_1 = 1$. Wenn wir also die stückweise lineare Randkurve

$$R : [0,1] \to \partial Q$$

nehmen, welche

$$R(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
$$R\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$
$$R\left(\frac{2}{4}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},$$
$$R\left(\frac{3}{4}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

erfüllt (also die 4 Randpunkte einmal gegen den Uhrzeigersinn zyklisch durchläuft), dann ist $\varphi_1 \circ R : [0,1] \to \partial Q$ eine Randkurve, die wieder die 4 Randpunkte einmal gegen den Uhrzeigersinn zyklisch durchläuft. Also gilt

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},$$

da in dieser Umlaufrichtung der Eckpunkt $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ auf den Eckpunkt $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ folgt. □

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Es gibt $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für die Lösung $u = u(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = au(1-u)(2+u) + bt^3u + c\sin(dt^{12}\arctan(ft^{13}u)) + \frac{g^2}{1+g^2}, \qquad u(0) = 0$$

gilt:

$$|u(1000) - 500| < 10^{-100}.$$

Lösung:
Wir setzen zunächst $(a, b, c, d, e, f, g) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^7$. Das ist zwar nicht in der erlaubten Menge für die Parameter, liefert aber schon nützliche Informationen. Die Differentialgleichung lautet nun :

$$\dot{u} = \frac{1}{2}, u(0) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist offentsichtlich

$$u(t) = \frac{1}{2} \cdot t,$$

und für diese gilt

$$|u(1000) - 500| = 0.$$

Wegen der stetigen Abhänigkeit von den Parametern (Korollar 2.18) existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x = (a, b, c, d, e, f, g) \in B_\delta((0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ für die Lösung $\bar{u}(t, 0, 0, x)$ gilt, dass

$$|\bar{u}(1000) - u(1000)| = |\bar{u}(1000) - 500| < 10^{-100}.$$

Also gibt es Parameter $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}) \in \mathbb{R}^7 \backslash \{0\}$, für die die Lösungen die angegebene Abschätzung erfüllen. $\square$