# Übungen zur Vorlesung

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

# Lösungen zu Aufgabenblatt 6

**Aufgabe 1:**
Zeigen Sie folgende Aussagen über die Matrixexponentialfunktion:

**a)** Für jede reelle $n \times n$-Matrix $A$ gilt:

$$\det E(A,t) = e^{t \operatorname{Spur}(A)}.$$

**Lösung:**
Zu jeder $n \times n$-Matrix $A$ gibt es eine Transformationsmatrix $T$, so dass $J = T^{-1}AT$ Jordanform hat, diese hat wegen der Ähnlichkeit die gleiche Spur wie $A$, d.h. es ist Spur $(A) =$ Spur $(J)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\det E(A,t) &= \det E(A,t) \cdot \det \left(T^{-1}T\right) \\
&= \det T^{-1} \cdot \det E(A,t) \cdot \det T \\
&= \det \left(T^{-1} E(A,t)\, T\right) \\
&= \det \left(T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right) T\right) \\
&= \det \left(\lim_{m\to\infty} T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k\right) T\right) \\
&= \det \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} T^{-1} A^k T\right) \\
&= \det \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} \left(T^{-1}AT\right)^k\right) \\
&= \det E\left(T^{-1}AT, t\right) \\
&= \det E(J,t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp(J_{ii} t) \\
&= \exp(\text{Spur}(J) \cdot t) \\
&= \exp(\text{Spur}(A) \cdot t)
\end{aligned}$$

**b)** Für $A^T$ (die transponierte Matrix) gilt:

$$E\left(A^T, t\right) = (E(A,t))^T.$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} E\left(A^{\mathrm{T}}, t\right) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} \left(A^{\mathrm{T}}\right)^k \\ &= \lim_{m\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k \right)^{\mathrm{T}} \\ &= \left( \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k \right)^{\mathrm{T}} \\ &= E\left(A, t\right)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:**
**a)** Zeigen Sie: Die Matrixexponentialfunktion bildet schiefsymmetrische Matrizen auf orthogonale Matrizen ab. D.h.: Wenn $A^T = -A$ gilt, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $B = E(A, t)$ die Beziehung

$$B^T = B^{-1}$$

erfüllt. Tipp: Berechnen Sie $E(A + A^T, t)$.

**Lösung:**

$$I_n = E\left(0, t\right) = E\left(A - A, t\right) = E\left(A + A^{\mathrm{T}}, t\right) = E\left(A, t\right) \cdot E\left(A^{\mathrm{T}}, t\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(E\left(A, t\right)\right)^{-1} = E\left(A^{\mathrm{T}}, t\right)$$

**b)** Zeigen Sie: Wenn $A$ schiefsymmetrisch ist, dann ist $\det(E(A, t)) = +1$.

**Lösung:**
Für schiefsymmetrische Matrizen gilt Spur$(A) =$ Spur$(A^{\mathrm{T}}) =$ Spur$(-A) = 0$, daher gilt:

$$\det E\left(A, t\right) = \exp\left(\text{Spur}\left(A\right) \cdot t\right) = \exp\left(0 \cdot t\right) = +1$$

**Aufgabe 3:**
**a)** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y \end{aligned}$$

mit Anfangsdaten $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

**Lösung:**
Sei zunächst

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dann lässt sich die Differentialgleichung schreiben als

(1) $$\dot{x} = A \cdot x, \ x(0) = (1, 2, 3)^T.$$

Um die Gleichung zu lösen kann man die Matrix in Diagonalform transformieren. $A$ hat die Eigenwerte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 2, -1)$. Durch die Spalten von

$$S^{-1} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis aus Eigenvektoren gegeben. $A$ ist also diagonalisierbar und mit

$$S := (S^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

gilt $J := S \cdot A \cdot S^{-1} = \mathbf{diag}(-1, 2, -1)$. Nun ist $x$ genau dann eine Lösung von $(1)$, wenn $v := S \cdot x$ eine Lösung von

$$\dot{v} = S \cdot A \cdot S^{-1} \cdot v = J \cdot v,\ v(0) = S \cdot (1, 2, 3)^T = (0, 2, 1)^T =: v_0 \tag{2}$$

ist. Eine Lösung von $(2)$ kann man aufgrund der Diagonalform leicht mit Hilfe der Exponentialabbildung angeben:

$$v(t) = E(J, t) \cdot v_0 = \mathbf{diag}(e^{-t}, e^{2t}, e^{-t}) \cdot (0, 2, 1)^T = (0, 2 \cdot e^{2t}, e^{-t})^T.$$

Nun muss man noch mit der Inversen rücktransformieren, d.h. die Lösung ergibt sich zu

$$x(t) := S^{-1} \cdot v(t) = (-e^{-t} + 2 \cdot e^{2t}, 2 \cdot e^{2t}, e^{-t} + 2 \cdot e^{2t}).$$

Wie man unmittelbar sieht sind die Anfangswerte als auch die Differentialgleichung erfüllt.

**b)** Analysieren Sie die Ruhelage $x = y = z = 0$ auf Stabilität und auf asymptotische Stabilität.

**Lösung:**
Es ist offensichtlich, dass die Lösung nicht asymptotisch stabil ist, denn für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ divergiert mindestens eine Komponente. Genauso kann keine Poisson-Stabilität vorliegen, da das entsprechende Orbit unbeschränkt ist.

**Aufgabe 4:**
**a)** Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} u.$$

Skizzieren Sie ein Phasenportrait.

**Lösung:**
Sei zunächst

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

dann läutet die Differentialgleichung

$$\dot{u} = A \cdot u,\ u(0) = (u_0^1, u_0^2, u_0^3)^T.$$

Wie in Aufgabe 3 sieht man, dass $A$ diagonalisierbar ist, mit den Transformationsmatrizen:

$$S^{-1} := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S := \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Dann wird die transformierte Gleichung

$$\dot{v} = S \cdot A \cdot S^{-1} \cdot v = \mathbf{diag}(4, -4) \cdot v$$

durch

$$v = (v_0^1 \cdot e^{4t}, v_0^2 \cdot e^{-4t})^T$$

gelöst. Die korrekten Anfangswerte für das transformierte Problem ergeben sich zu

$$v_0 = S \cdot u_0 = \left( \frac{(u_0^1 + u_0^2)}{4}, \frac{(-u_0^1 + 3 \cdot u_0^2)}{4} \right)^T .$$

Damit ergibt sich die Lösung

$$u(t) = S^{-1} \cdot v(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot e^{4t} \cdot \frac{(u_0^1+u_0^2)}{4} - e^{-4t} \cdot \frac{(-u_0^1+3 \cdot u_0^2)}{4} \\ e^{4t} \cdot \frac{(u_0^1+u_0^2)}{4} + e^{-4t} \cdot \frac{(-u_0^1+3 \cdot u_0^2)}{4} \end{pmatrix} .$$

**b)** Finden Sie alle Ruhelagen und untersuchen Sie diese auf Stabilität und auf asymptotische Stabilität.

**Lösung:**
Offenbar gilt $\det(A) = -16 \neq 0$, d.h. $A$ ist invertierbar und hat folglich lediglich die Nullstelle $0$. Bezüglich der Stabilität gilt wie in 3 b), das $0$ weder asymptotisch noch Poissonstabil ist. In jeder Umgebung der $0$ gibt es Anfangswerte $u_0$, s.d. keiner der Exponentialterme verschwindet. Dann divergieren beide Komponenten für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$.