Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:
a) Berechnen Sie die ω-Limesmenge $\omega((0,0))$ für die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= a \end{aligned}$$

auf dem 2-Torus, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lösung:
Wir wissen bereits, dass in diesem Fall das Orbit jeden Punktes dicht ist. D.h. unser Orbit vom Punkt $(0,0)$ kommt in jede Umgebung jeden Punktes und zwar beliebig oft: Es gibt eine Folge von Zeitpunkten $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $u((0,0),t_i) \in U$, wobei U eine beliebig kleine Umgebung eines beliebigen Punktes in $\mathbb{T}^2$ ist, denn wegen der Dichtheit aller Orbits gibt es ein t_1, so dass $u((0,0),t_1) \in U$. Nun gibt es ein ε_1 so, dass $u((0,0),t_1+\varepsilon_1) \notin U$. Betrachtet man nun das Orbit von $u((0,0),t_1+\varepsilon_1)$, welches das selbe ist wie das Orbit von $(0,0)$, so gibt es wieder wegen der Dichtheit aller Orbits ein t_2, so dass $u((0,0),t_2) \in U$. Induktiv findet man so t_i für alle $i \in \mathbb{N}$. Da alle Orbits sowohl vorwärts als auch rückwärts dicht sind kann man dies für $t > 0$ als auch $t < 0$ durchführen und kommt zu dem Ergebnis, dass jeder Punkt sowohl in der α- als auch ω-Limesmenge liegt, also

$$\alpha\left((0,0)\right) = \omega((0,0)) = \mathbb{T}^2 \quad .$$

□

b) Wiederholen Sie dies für $a \in \mathbb{Q}$.

Lösung:
Für $a \in \mathbb{Q}$ ist das Orbit von $(0,0)$ periodisch, womit

$$\alpha((0,0)) = \omega((0,0)) = \mathcal{O}((0,0))$$

gilt. □

Aufgabe 2:
Finden Sie eine autonome Differentialgleichung, so dass das Orbit eines Punktes dicht ist, aber weder das positive noch das negative Semiorbit dieses Punktes dicht ist.
Tipp: Benutzen Sie eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Lösung:
Man betrachte die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$, darauf die Differentialgleichung $u(x,t) = t$, also $\dot{u} = 1$. Dann ist jedes Orbit dicht, nicht jedoch die negativen bzw. positiven Semiorbits, welche nur dicht in $(-\infty, t_0]$ bzw. $[t_0, \infty)$ sind.

Ebenso können wir die kompakte Mannigfaltigkeit $M = S^1$ verwenden: Gibt es darauf einen homoklines Orbit, d.h. einen Punkt p mit $\omega(p) = q = \alpha(p)$ mit $p \neq q$, dann ist das Orbit von p dicht, aber keins der Semiorbits. $\square$

War Ihnen dies zu einfach? Dann überlegen Sie, ob Sie auch eine Antwort in einer Dimension >1 finden können.

Aufgabe 3:
Sei φ ein Fluss im $\mathbb{R}^2$, der ein periodisches Orbit P hat, welches also $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete $G_\mathrm{i}, G_\mathrm{a}$ (innen und außen) zerlegt.

a) Zeigen Sie: Beide Gebiete sind invariant unter φ.

Lösung:
Das periodische Orbit P ist natürlich invariant. Also kann kein Punkt auf P auf einen Punkt mit dem Fluss auf einen Punkt in $G_\mathrm{i}$oder einen Punkt in G_a abgebildet werden, und umgekehrt kann auch kein Punkt aus $G_\mathrm{i}$oder aus G_a mit dem Fluss auf einen Punkt in P abgebildet werden.

In geeigneten Koordinaten hat P das Bild $x^2 + y^2 = 1$, das heisst, das Bild von P ist der Einheitskreis K. Das heisst: Es gibt einen Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(P) = K$. Das von P umrandete (innere) Gebiet G_i und das äußere Gebiet G_a werden dann auf die Menge $\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ bzw. auf die Menge $\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ abgebildet.

Wenn nun der Fluss einen Punkt a aus G_i auf einen Punkt b aus G_a abbildet, dann muss gelten $||h(a)|| < 1$ und $||h(b)|| > 1$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann einen Punkt c auf dem Orbit von a mit $||h(c)|| = 1$, also $h(c) \in K$ und somit $c \in P$. Widerspruch. $\square$

b) Zeigen Sie:

- Wenn $u \in G_\mathrm{i}$, dann ist $\omega(u) \subset \overline{G_\mathrm{i}}$ und $\alpha(u) \subset \overline{G_\mathrm{i}}$.
- Wenn $u \in G_\mathrm{a}$, dann ist $\omega(u) \subset \overline{G_\mathrm{a}}$ und $\alpha(u) \subset \overline{G_\mathrm{a}}$.
- Wenn $u \in P$, dann ist $\omega(u) = P$ und $\alpha(u) = P$.

Lösung:
Wenn $u \in G_\mathrm{i}$, dann ist $\varphi_t u \in G_\mathrm{i}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und daher liegen alle Häufungspunkte davon in $\overline{G_\mathrm{i}}$. Analoges gilt für $\overline{G_\mathrm{a}}$.

P ist invariant, also ist $\omega(u) \subset P$. Gleichheit folgt aus der Periodizität. $\square$

Aufgabe 4:
Betrachten Sie das Anfangswertproblem, das in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= 25r(1-r)\cos\left(\arctan\left(r^{127}e^{e^r}\theta^{128}\right)\sin\left(\sin\left(\arctan\left(e^{e^\theta}\right)\right)\right)\right)\\
\dot{\theta} &= 37 + e^{-r^{66}}(\cos(\theta))^{83}(\sin(r))^{32} + \arctan\left(r^{r^r}\right)
\end{aligned}$$

mit Anfangswert

$$r(0) = \frac{18}{188}, \quad \theta(0) = \frac{17}{177}.$$

Zeigen Sie: Die ω-Limesmenge und die α-Limesmenge von $p = (r(0), \theta(0))$ liegen in der Kreisscheibe mit Radius 1. Das heißt, für jedes $q \in \omega(p)$, welches in Polarkoordinaten die Darstellung $q = (R, \Theta)$ hat, gilt

$$R \leq 1,$$

und analog für $q \in \alpha(p)$.

Lösung:
Offenbar ist die Lösung für den Anfangswert $(r_0, \theta_0) = (1, 0)$ periodisch. In diesem Fall gilt nämlich offenbar $r =$ const. und $\dot{\theta} > 0$, d.h θ ist streng monoton wachsend. Wegen $\theta \in S^1$ ist die zugehörige Lösung periodisch. Der Orbit der Lösung teilt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete, die wir analog zu Aufgabe 3 mit G_i (innen) und G_a (außen) bezeichnen. Wegen $r_0 = 1$ gilt $G_i = B(0,1)$ und $G_a = \overline{B(0,1)}^C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)| > 1\}$. Die Behauptung folgt nun aus Aufgabe 3 b). $\square$