Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Sei $u = u(t)$ eine Funktion, welche die Gleichung der **Halbwertszeit** erfüllt: Es gibt ein $\tau > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(t+\tau) = \frac{1}{2}u(t).$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $u = u(t)$ die Differentialgleichung $\frac{du(t)}{dt} = C \cdot u(t)$ löst.

Aufgabe 2:
a) Lösen Sie die Gleichungen

- $u' = u^2 + 1$
- $u' = -\frac{x^2}{u^3}$
- $u' = e^u \sin(x)$

mittels Trennung der Variablen.

b) Diskutieren Sie das Verhalten dieser Lösungen mit $u(0) = p_0,\ p_0 \in \mathbb{R}$:

- Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?
- Wie verhält sich die Lösung für $t \to t_+,\ t \to t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnet, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Aufgabe 3:
Sei $f : (X,d) \to (X,d)$ eine starke Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\lambda < 1$. Der Fixpunkt von f heiße $\bar{x}$. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Aufgabe 4:
Sei $\varphi \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ und sei die Abbildung T definiert durch

$$T : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to C([0,1], \mathbb{R}^n),$$
$$u \mapsto \int_0^1 \varphi(., y) u(y) dy.$$

Zeigen Sie: T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Abgabe: Dienstag, 18.4.2006 in der Vorlesung