Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1:
Wenn

$$\dot{u} = Au$$

ein lineares Hamilton-System auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ ist, dann heißt die Matrix A **symplektisch**. Es gilt dann:

$$A^T J A = J$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei 0 und 1 jeweils $n \times n$-Matrizen sind.

Zeigen Sie: Eine symplektische Matrix hat Determinante +1.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Die Eigenwerte einer symplektischen Matrix treten in Quadrupeln auf. D.h., wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert ist, dann sind auch

$$\bar{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

Eigenwerte.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Für jedes System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(y) \\ \dot{y} &= g(x) \end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ und mit Lipschitz-stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist der Lösungsfluss volumenerhaltend.

Tipp: Benutzen Sie die Methode aus dem Beweis der Volumenerhaltung von Hamilton-Systemen.

Aufgabe 4:
Gibt es eine Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$, so dass die ω-Limesmenge $\omega(p)$ ein periodisches Orbit P enthält und so dass $\omega(q)$ je einen Punkt im Inneren und im Äußeren des von P berandeten Gebiets enthält, aber nicht P enthält? (Beispiel oder Gegenbeweis)

Abgabe: 4.7.2006 in der Vorlesung