Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Die Differentialgleichung
$$\frac{du(t)}{dt} = -(u(t))^2 + u(t) + 2u(t)t^2 + 2t - t^2 - t^4$$
hat eine Lösung
$$u(t) = 1 + t^2.$$

b) Zeigen Sie: Wenn $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist mit Anfangswert $\tilde{u}(0) < 1$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $\tilde{u}(t) < 1 + t^2$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: $u_1(t) \equiv 0$ und $u_2(t) = \frac{1}{27}t^3$ sind Lösungen des Anfangswertproblems
$$\frac{du}{dt} = u^{2/3}, \qquad u(0) = 0.$$
Diese Lösungen sind verschieden. Warum ist dies kein Widerspruch zum Existenz-Eindeutigkeits-Satz?

Aufgabe 3:
Ist die Lösung des Anfangswertproblems
$$\frac{du}{dt} = u^{2/3}, \qquad u(0) = 1$$
für $t \geq 0$ eindeutig? Läßt sie sich auf ganz $[0, \infty)$ fortsetzen? Beweisen Sie Ihre Aussagen.
Tipp: Zeigen Sie: $u(t) \geq 1$ für alle $t \geq 1$.

Aufgabe 4:
a) Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\frac{du}{dt} = u^3, \qquad u(0) = 1.$$
Finden Sie das maximale Existenzintervall der Lösung. Beschreiben Sie, wie sich die Lösung am Rand dieses Intervalls verhält und warum dieses Verhalten es unmöglich macht, die Lösung auf ein größeres Intervall fortzusetzen.

b) Analog für
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{(u+1)(u-2)}, \qquad u(0) = 0.$$

Abgabe: 02.5.2006 in der Vorlesung