Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$5^{5^1} \cdot \frac{d^{127}u}{dt^{127}} + 5^{5^2} \cdot \frac{d^{126}u}{dt^{126}} + 5^{5^3} \cdot \frac{d^{125}u}{dt^{125}} + \cdots + 5^{5^{128}} \cdot u = \cos\left(\sin\left(e^{e^{\arctan(u)}}\right)^{13} \cos\left(2^{\sin \arctan t^{26}}\right)\right)$$

mit Anfangsdaten $\frac{d^{126}u}{dt^{126}}(0) = 1,\ \frac{d^{125}u}{dt^{125}}(0) = 2, \ldots,\ u(0) = 127$ hat auf einem Intervall $(-\delta, \delta)$ eine Lösung, und diese ist dort eindeutig.

b) Finden Sie das maximale Existenzintervall der Lösung dieses Anfangswertproblems. Ist die Lösung dort eindeutig? (Begründung erforderlich.)

Aufgabe 2:
Auf der 2-Sphäre $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ ist ein Vektorfeld f definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \cos(7z^4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $\frac{du}{dt} = f(u), \quad u(t_0) = u_0 \in S^2$.

Aufgabe 3:
Sei f ein glattes Tangentialvektorfeld auf der 2-Sphäre S^2 mit Ruhelagen am Nord- und Südpol, d.h. $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$. Sei $c : [0,1] \to S^2$ eine stetige Kurve mit $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sei $\varphi : S^2 \times \mathbb{R} \to S^2$ der Lösungsfluss zur Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = f(u)$. Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet $\varphi_t(c([0,1]))$ den Äquator $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie alle Ruhelagen von $\frac{du}{dt} = (u-1)(u-2)(u-3)$ auf Poisson-/Lyapunov-Stabilität und auf asymptotische Stabilität.

Abgabe: 09.5.2006 in der Vorlesung