

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1:

a) Seien φ ein Fluss auf einer Menge X und ψ ein Fluss auf einer Menge Y . Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi \times \psi : X \times Y \times \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$, genannt der **Produktfluss** von φ und ψ , definiert durch

$$(\varphi \times \psi)((x, y), t) := (\varphi(x, t), \psi(y, t)) \quad \text{bzw.} \quad (\varphi \times \psi)_t(x, y) := (\varphi_t(x), \psi_t(y))$$

ist ein Fluss auf der Menge $X \times Y$.

b) Beschreiben Sie den Produktfluss der Flüsse φ und ψ auf S^1 , wobei

$$\varphi_t(x) = x + at \pmod{1},$$

$$\psi_t(x) = x + bt \pmod{1}$$

und $a, b \in \mathbb{R}$. Für welche a, b hat der Produktfluss periodische Punkte?

Aufgabe 2:

Sei φ der Lösungsfluss der (autonomen) Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion mit globaler Lipschitzschranke ist. Sei $Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}$.

Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_t(Q)$ eine Menge, welche genau 4 Ecken und ansonsten einen glatten Rand hat.

Aufgabe 3:

Seien φ und Q wie in Aufgabe 2. Nehmen Sie weiterhin an, dass gilt: $\varphi_1(Q) = Q$.

a) Welche Werte kann $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ annehmen? Konstruieren Sie für jeden möglichen Wert eine Funktion f , so dass dieser Wert angenommen wird.

b) Wenn Sie wissen, dass $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, welche Werte kann $\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ dann annehmen? (Mit Beweis.)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Es gibt $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für die Lösung $u = u(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = au(1-u)(2+u) + bt^3u + c \sin(dt^{12} \arctan(ft^{13}u)) + \frac{g^2}{1+g^2}, \quad u(0) = 0$$

gilt:

$$|u(1000) - 500| < 10^{-100}.$$

Abgabe: 16.5.2006 in der Vorlesung