Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 7

Analysieren Sie folgende mathematischen Modelle der Liebesbeziehung zwischen den Personen Romeo und Julia[1]. Sei $R(t)$ Romeos Liebe zu Julia, $J(t)$ Julias Liebe zu Romeo. Hierbei ist $R(t), J(t) \in \mathbb{R}$, d.h. negative Gefühle sind möglich.

Aufgabe 1:
a) (Stimmt der Spruch "Gleich und gleich gesellt sich gern"?) Analysieren Sie, was bei zwei gleichenartigen, vorsichtigen und aufmerksamen Liebenden passiert. Annahmen:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bJ \\ \dot{J} &= aJ + bR \end{aligned}$$

(die beiden verhalten sich gleich), $a < 0$ (sie sind vorsichtig) und $b > 0$ (sie sind aufmerksam). Beschreiben Sie das Langzeitverhalten des Systems. Wie hängt dieses Langzeitverhalten von den Parametern a, b ab?

b) (Welche Beziehungen verlaufen ewig positiv?) Bestimmen Sie für alle Werte der Persönlichkeitsparameter $a < 0, b > 0$ die Menge aller Anfangswerte $(R(0), J(0))$ der Beziehung, so dass für alle $t \geq 0$ gilt: $R(t) > 0, J(t) > 0$.

Aufgabe 2:
(Feuer und Eis: Ziehen sich Gegensätze an?) Analysieren Sie $\dot{R} = aR + bJ,\ \dot{J} = -aJ - bR$, für beliebiges $a, b \in \mathbb{R}$, analog zu Aufgabe 1 (Langzeitverhalten, Positivität).

Aufgabe 3:
Die Umgebung macht den Liebenden zu schaffen: Analysieren Sie $\dot{R}(t) = R(t) + J(t) - M$, $\dot{J}(t) = J(t) + R(t) - C$, wobei $M > 0,\ C > 0$ die (konstanten) Antipathiewerte der Familien sind. Die Affäre beginnt bei $R(0) = R_0 > 0$, $J(0) = J_0 > 0$. Wie geht sie aus?

Aufgabe 4:
Die Liebenden lassen sich durch (periodisch wiederholten) Klatsch und Tratsch beieinflussen: $\dot{R}(t) = R(t) + J(t) + k\sin(\omega t)$, $\dot{J}(t) = J(t) + R(t) + k\cos(\omega t)$.

a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung (und somit der Beziehung).

b) ("Ist Klatsch gefährlich?") Gibt es Werte für k (Klatschstärke) und ω (Themenwiederholfrequenz), welche die hoffnungsvoll beginnende Beziehung $\dot{R}(t) = R(t) + J(t) + k\sin(\omega t)$, $\dot{J}(t) = J(t) + R(t) + k\cos(\omega t)$ mit Anfangswerten $R(0) = 1$, $J(0) = 1$ zerstört, d.h. Lösungen produziert mit $R(t) < 0$ und $J(t) < 0$ für alle t in einem Intervall $[t_0, \infty)$?

Abgabe: 30.5.2006 in der Vorlesung

---

[1] oder Romina und Julius. Aber die folgenden Gleichungen sind sowieso symmetrisch in R und J.