Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1:
a) Programmieren in einer Programmiersprache Ihrer Wahl das Runge-Kutta-Verfahren im $\mathbb{R}^2$ und analysieren Sie damit das System

$$\begin{aligned}\dot{x} =& 2x - 1.2xy\\ \dot{y} =& -y + 0.9xy\end{aligned}$$

mit Anfangswert $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, indem Sie 80 Schritte mit Schrittweite $h = 0.1$ ausrechnen und plotten.

b) Wiederholen Sie dies mit 800 Schritten der Schrittweite $h = 0.01$. Sehen Sie einen wesentlichen Unterschied? War die ursprüngliche Schrittweite $h = 0.1$ klein genug?

Aufgabe 2:
Wiederholen Sie Aufgabe 1 (Teil a + b) mit dem Euler-Verfahren. Vergleichen Sie die Ergebnisse des Euler-Verfahrens mit denen des Runge-Kutta-Verfahren. Welchem vertrauen Sie in diesem Fall mehr, und warum?

Aufgabe 3:
Finden Sie eine Lipschitz-stetige Funktion $f = f(u,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(u,t)$, $u(0) = 0$ eine Lösung hat, die für $t \to \infty$ gegen ∞ konvergiert, und für die das Euler-Verfahren mit Schrittweite $t = 0.1$ gegen $-\infty$ konvergiert.

Aufgabe 4:
(Extrospektive Liebhaber:) Romeo und Julia reagieren auf die Gefühle des anderen, aber bemerken die eigenen nicht:

$$\dot{R} = aJ, \qquad \dot{J} = bR.$$

a) Was passiert? Finden Sie die allgemeine Lösung. Beschreiben Sie das Langzeitverhalten dieser Beziehung.

b) Welchen Anteil der Zeit sind Romeo und Julia gleichzeitig verliebt? Bestimmen Sie als Funktion von a, b und den Anfangswerten $R(0), J(0)$ die Funktion

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t)dt,$$

wobei

$$A(t) = \begin{cases} 1 & R(t) > 0 \text{ und } J(t) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abgabe: 7.6.2006 in der Vorlesung