Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:
a) Berechnen Sie die ω-Limesmenge $\omega((0,0))$ für die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1\\ \dot{y} &= a\end{aligned}$$

auf dem 2-Torus, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Wiederholen Sie dies für $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2:
Finden Sie eine autonome Differentialgleichung, so dass das Orbit eines Punktes dicht ist, aber weder das positive noch das negative Semiorbit dieses Punktes dicht ist.
Tipp: Benutzen Sie eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 3:
Sei φ ein Fluss im $\mathbb{R}^2$, der ein periodisches Orbit P hat, welches also $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete $G_{\mathrm{i}}, G_{\mathrm{a}}$ (innen und außen) zerlegt.

a) Zeigen Sie: Beide Gebiete sind invariant unter φ.

b) Zeigen Sie:

- Wenn $u \in G_{\mathrm{i}}$, dann ist $\omega(u) \subset \overline{G_{\mathrm{i}}}$ und $\alpha(u) \subset \overline{G_{\mathrm{i}}}$.
- Wenn $u \in G_{\mathrm{a}}$, dann ist $\omega(u) \subset \overline{G_{\mathrm{a}}}$ und $\alpha(u) \subset \overline{G_{\mathrm{a}}}$.
- Wenn $u \in P$, dann ist $\omega(u) = P$ und $\alpha(u) = P$.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie das Anfangswertproblem, das in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 25r(1-r)\cos\left(\arctan\left(r^{127}e^{e^r}\theta^{128}\right)\sin\left(\sin\left(\arctan\left(e^{e^\theta}\right)\right)\right)\right)\\ \dot{\theta} &= 37 + e^{-r^{66}}(\cos(\theta))^{83}(\sin(r))^{32} + \arctan\left(r^{r^r}\right)\end{aligned}$$

mit Anfangswert

$$r(0) = \frac{18}{188}, \quad \theta(0) = \frac{17}{177}.$$

Zeigen Sie: Die ω-Limesmenge und die α-Limesmenge von $p = (r(0), \theta(0))$ liegen in der Kreisscheibe mit Radius 1. Das heißt, für jedes $q \in \omega(p)$, welches in Polarkoordinaten die Darstellung $q = (R, \Theta)$ hat, gilt

$$R \leq 1,$$

und analog für $q \in \alpha(p)$.

Abgabe: 20.6.2006 in der Vorlesung