

Dynamisches Verhalten in Neuronalen Netzen

Sebastian Copony
Universität Hamburg

20.08.2007

1 Einleitung

Der herkömmliche Computer ist dem menschlichen Gehirn bei Problemen, welche sich durch einen Algorithmus lösen lassen, weit überlegen. Jedoch gibt es noch viele Aufgaben, die ein solcher Computer schlecht oder gar nicht lösen kann. Zum Beispiel kann das Gehirn in sehr viel kürzerer Zeit und auch zuverlässiger bekannte Objekte und Gesichter erkennen. Außerdem liefert das Gehirn auch dann noch korrekte Ergebnisse, wenn einige Nervenzellen, welche an der Lösung des Problems beteiligt sind, ausfallen oder die „Eingaben“ fehlerhaft sind.

Die Idee ist die Arbeitsweise des Gehirns auf Maschinen zu übertragen. Künstliche Neuronale Netze bestehen daher wie ihre biologischen Vorbilder aus einer Vielzahl von Neuronen, welche sich gegenseitig aktivieren, und so die erhaltenen Informationen verarbeiten. Was diese Netze für Anwendungen interessant macht, ist ihre Fähigkeit zu lernen. Man kann sie in einer Trainingsphase dafür konditionieren bestimmte Probleme zu lösen, die ein Algorithmus nicht bewältigen kann. Sie sind nämlich in der Lage von den Trainingsbeispielen auf ähnliche Probleme zu generalisieren.

Die meisten Modelle streben bei ihrer Informationsverarbeitung stabile Zustände an, was aber nicht dem Verhalten des biologischen Vorbilds entspricht. Deshalb wollen wir einfache Neuronale Netze betrachten, welche chaotisches Verhalten zeigen, und untersuchen wie dieses in der Informationsverarbeitung ausgenutzt werden kann.

2 Neuronale Netze

2.1 Neuronen und Netze

Neuronen sind die elementaren Bestandteile Neuronaler Netze. Tatsächlich ist ein Neuron eine kleine Berechnungseinheit, welche eine Eingabe aus dem Netz erhält und daraufhin seinen Output berechnet. Formal kann man ein Neuron folgendermaßen definieren:

Definition: Ein (*künstliches*) *Neuron* ist ein Tupel (x, w, f_a, f_o, o) bestehend aus einem Eingabevektor $x = (x_1, \dots, x_n)$, einem Gewichtevektor $w = (w_1, \dots, w_n)$, einer Aktivierungsfunktion $f_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ und einer Ausgabefunktion $f_o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $f_o(f_a) = o$ der Ausgabewert ist, welcher an die nachfolgenden Neuronen weitergeleitet wird.

Dabei berechnet die Aktivierungsfunktion den Aktivierungszustand des Neurons aus der Netzeingabe $\sum_{i=1}^n w_i x_i$ abhängig vom Schwellenwert Θ der Funktion. Biologisch gesehen reagiert ein Neuron sehr empfindlich in der Region um den Schwellenwert und formal gesehen ist es der Punkt des stärksten Anstiegs der Funktion. Bei einigen Aktivierungsfunktionen/Neuronenmodellen ist das Neuron unterhalb des Schwellenwertes völlig inaktiv. Die Ausgabefunktion ist in den meisten Fällen die Identität und der Ausgabewert somit gleich dem Aktivierungszustand. Dies liegt daran, dass bei den meisten Netzmodellen biologisch zutreffendere Modelle keine besseren Ergebnisse erzielen. Wir werden im Folgenden auch immer die Identität als Ausgabefunktion verwenden. Häufig

verwendete Aktivierungsfunktionen sind die binäre Schwellenwertfunktion

$$f_a = \begin{cases} 1 & , \text{für } \sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \Theta, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

die Sigmoidfunktion

$$f_{a,\mu}(z) = \begin{cases} 1 - \exp(-\mu z) & , \text{für } z = \sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \Theta, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

oder stückweise lineare Funktionen

$$f_{a,\mu}(z) = \begin{cases} 0 & , \text{für } z = \sum_{i=1}^n w_i x_i < \Theta, \\ \mu(z - \Theta) & , \text{für } \Theta \leq z \leq \Theta + \frac{1}{\mu}, \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei μ in den letzten beiden Fällen der Steigungsparameter ist.

Ein Neuronales Netz besteht in der Regel aus einer großen Menge solcher Neuronen und wir wollen hier eine formale Definition angeben:

Definition: Ein (*künstliches*) *Neuronales Netz* ist ein Tupel (E, N, A, V) , wobei E eine Menge von n_E Eingabestellen, N eine Menge von n Neuronen, A eine Menge von n_A Ausgabestellen und V eine Menge gewichteter gerichteter Verbindungen ist. Eine gewichtete gerichtete Verbindung ist ein Tupel (k_i, k_j, w_{ij}) , wobei $k_i \in E \cup N, k_j \in N \cup A$ und das Gewicht $w_{ij} \in \mathbb{R}$ sind. Dabei ist k_i das sendende und k_j das empfangende Element.

Hierbei gehören Neuronen, welche eine externe Eingabe erhalten zur Inputschicht und Neuronen, welche mit einer Ausgabestelle verknüpft sind zur Outputschicht. Neuronen, welche weder einer Verbindung zu Eingabe- noch zu Ausgabestellen haben, sind reine Berechnungselemente in der verborgenen Schicht.

Inputschicht verborgene Schicht Outputschicht

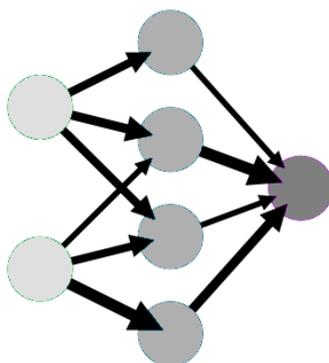


Abbildung 1: Ein einfaches mehrschichtiges Netz.

2.2 Das Perzeptronmodell

Das erste Neuronenmodell ist die nach ihren Erfindern benannte McCulloch–Pitts–Zelle.

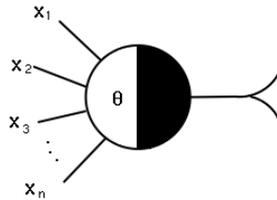


Abbildung 2: McCulloch–Pitts–Zelle.

Sie hat mehrere Eingänge und kann die beiden Zustände *true* = 1 und *false* = 0 annehmen. True bedeutet, dass das Neuron feuert sobald die (ungewichtete) Summe der Eingaben den Schwellenwert überschreitet und false, dass das Neuron inaktiv ist. Dabei sind die Eingabewerte ebenfalls binär. Eine einzelne Zelle kann schon beliebige arithmetische und einige logische Funktionen berechnen. Netze von McCulloch–Pitts–Zellen sind sogar in der Lage beliebige logische Funktionen darzustellen.



Abbildung 3: McCulloch–Pitts–Zellen zur Berechnung der AND und OR Funktion.

Das einfache Perzeptron ist eine Erweiterung der McCulloch-Pitts-Zelle indem es gewichtete Verbindungen zulässt. Eine Verbindung heißt

- hemmend, falls das Verbindungsgewicht kleiner Null ist und
- erregend, falls das Verbindungsgewicht größer Null ist.

Das Lernen, eine der wichtigsten Eigenschaften von Neuronalen Netzen, geschieht in der Regel durch die Änderung dieser Gewichte. Andere Methoden können in [1] nachgelesen werden. Damit Lernalgorithmen leichter in Neuronale Netze implementiert werden können, wird oftmals ein sogenanntes BIAS-Neuron verwendet, welches immer feuert und zu jedem Neuron als Gewicht dessen negativen Schwellenwert hat. Daraufhin wird der Schwellenwert in der Zelle natürlich Null gesetzt. Dies hat den Vorteil, dass der Lernalgorithmus den als Gewicht vorhandenen Schwellenwert anpassen kann.

An dieser Stelle wollen wir eine Version des Perzeptron-Lernalgorithmus vorstellen: Im Folgenden sei P die Menge der Punkte, für die das Perzeptron eine 1 ausgeben soll und N die Menge der Punkte, für die es eine 0 ausgeben soll. $\alpha > 0$ heißt die Lernrate des Algorithmus.

<i>Start:</i>	Der Gewichtevektor w_0 wird zufällig generiert Setze $t := 0$.
<i>Testen:</i>	Ein Punkt $x \in P \cup N$ wird zufällig gewählt. Falls $x \in P$ und $w_t x > 0$ gehe zu <i>Testen</i> Falls $x \in P$ und $w_t x \leq 0$ gehe zu <i>Addieren</i> Falls $x \in N$ und $w_t x < 0$ gehe zu <i>Testen</i> Falls $x \in P$ und $w_t x \geq 0$ gehe zu <i>Subtrahieren</i>
<i>Addieren:</i>	Setze $w_{t+1} = w_t + \alpha x$. Setze $t := t + 1$. Gehe zu <i>Testen</i> .
<i>Subtrahieren:</i>	Setze $w_{t+1} = w_t - \alpha x$. Setze $t := t + 1$. Gehe zu <i>Testen</i> .

Rosenblatt hat mit seinem Konvergenzsatz bewiesen, dass ein Perzeptron jede Funktion, die es repräsentieren kann, mit dem o.a. Algorithmus auch in endlicher Zeit lernen kann. Ob ein Perzeptron dazu in der Lage ist eine bestimmte Funktion darzustellen hängt also nur von der Netzarchitektur ab.

Ein einfaches Perzeptron ist genau wie die McCulloch–Pitts–Zelle nicht dazu in der Lage die XOR-Funktion zu berechnen. Das liegt daran, dass der Eingaberaum *linear separierbar* sein muss, d.h. dass ein n -dimensionaler Eingaberaum durch eine $(n - 1)$ -dimensionale Hyperebene in die Bereiche teilbar sein muss, welche den Funktionswert 1 bzw. 0 haben.

Dieses Problem wird durch mehrschichtige Perzeptronen gelöst, welche den Eingaberaum in beliebige Polygone aufteilen können. Ein Netz welches das XOR-Problem löst ist in Abbildung 4 gezeigt.

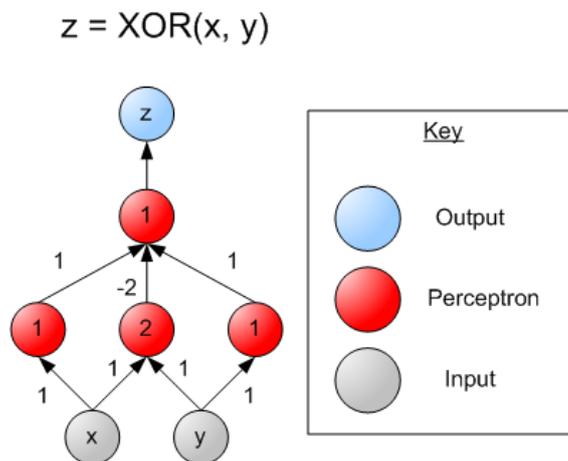


Abbildung 4: Ein dreischichtiges Perzeptron, welches die XOR-Funktion darstellt.

Hier gehe ich nicht weiter auf die verschiedenen Netzarchitekturen und Lernmethoden ein, da wir im Folgenden sehr einfach strukturierte Netze ohne Lernalgorithmus betrachten. Einen Überblick über verschiedene Netzarchitekturen und dazugehörige Lernalgorithmen kann man schnell in [2] gewinnen. Um sich die Leistungsfähigkeit eines Neuronalen Netzes und dessen Lernfähigkeit spie-

Für den Fall $k = k'$ reduziert sich die zweidimensionale Dynamik auf eine Dimension, was die Analyse vereinfacht. Wir werden die Fälle $k = k' = 1$ und $k = k' \neq 1$ genauer betrachten. Bis auf Weiteres sei der Schwellwert der Aktivierungsfunktion $t = 0$.

3.1 $k = k' = 1$

Dies bezeichnet den Fall, dass die Verbindungsgewichte $w_{yx} = w_{xx}$ und $w_{xy} = w_{yy}$ und weiterhin gelte, dass $a > b$. Die Dynamik dieses Systems nennt man die einer *asymmetrischen Zackenfunktion*:

$$z_n + 1 = F(z_n) = \begin{cases} (a - b)z_n & , \text{für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & , \text{für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

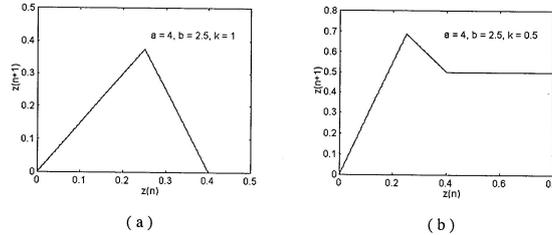


Abbildung 6: Das eindimensionale System, welches die Dynamik des Neuronenpaares beschreibt für (a) $k = k' = 1$ und (b) $k = k' = 0,5$.

Die Fixpunkte dieses Systems sind $z_1^* = 0$ und $z_2^* = \frac{1}{1+b}$. z_1^* existiert für alle Parameterwerte und ist stabil für $a - b < 1$, wohingegen z_2^* nur existiert, wenn $a - b > 1$, und stabil ist für $b < 1$. Darüber hinaus zeigt das System ein chaotisches Verhalten bis der maximale Output $1 - \frac{b}{a}$ in den Bereich $Z > \frac{1}{b}$ iteriert. Für das Parameterverhältnis $\frac{b}{a} = 0,5$ erhalten wir eine symmetrische Zackenfunktion und der Lyapunov-Exponent ($\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$) kann analytisch bestimmt werden, da die Steigung überall den Betrag $a - b = \frac{a}{2} = b$ hat. Damit ergibt sich $\lambda = \ln b$ für $0 < a < 4$, $\frac{b}{a} = 0,5$. Der zweite Fall, für den λ analytisch berechnet werden kann, ist, dass jeder Funktionswert angenommen wird, d.h.

$$F\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{b}.$$

Entlang der Kurve, die durch diese Relation bestimmt ist, entwickelt sich der Lyapunov-Exponent abhängig von $\frac{b}{a}$ mit

$$\lambda = -\frac{b}{a} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right).$$

Im Allgemeinen muss λ numerisch berechnet werden. Abbildung 7 zeigt λ abhängig von $\frac{b}{a}$ für $a = 4$. Die Abbildung zeigt hier chaotisches Verhalten. An den beiden Enden $\frac{b}{a} = 0,25$ und $0,75$ geht λ schnell gegen Null, was auf eine scharfe

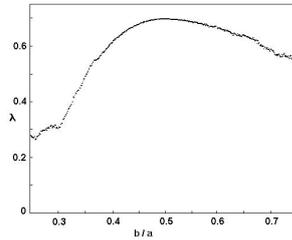


Abbildung 7: Lyapunov-Exponent für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

Trennung zwischen Fixpunktverhalten und Chaos an diesen beiden Punkten schließen lässt. Bei $\frac{b}{a} = 0,5$ wird das gesamte Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ von dem chaotischen Orbit gleichmäßig besucht ($F(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}$).

Wenn $F(\frac{1}{a}) > \frac{1}{b}$ gilt, dann wird das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ in einen chaotischen Bereich mit Maß Null — (normalerweise) eine nicht-einheitliche Cantor-Menge — und eine „Fluchtmenge“, die auf $z_1^* = 0$ abbildet, geteilt. Denn für $z \in (\frac{1}{b(b-a)}; \frac{b-1}{b^2})$ gilt $F(z) = 0$. Das heißt: Jedes Mal, wenn eine Iterierte von z in dieses Intervall fällt, konvergiert der Orbit im nächsten Schritt nach z_1^* . Die Punkte, welche im nächsten Schritt nicht auf z_1^* abgebildet werden, liegen in den beiden Intervallen $[0; \frac{1}{b(b-a)}]$ und $[\frac{b-1}{b^2}; 1]$, wodurch der Phasenraum in zwei invariante Bereiche geteilt wird. Nach n Iterationen existieren 2^n Fragmente der invarianten chaotischen Teilmenge mit $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) Intervallen der Länge $(a-b)^r(1-b)^{r-n}$.

Dass die Intervalle unterschiedliche Längen haben, liegt daran, dass der Betrag der Steigung in dem Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ nicht konstant ist. Man beachte, dass sogar für ein z , welches nicht in der invarianten Teilmenge liegt, der entsprechende Orbit vorübergehend chaotisches Verhalten zeigt bis eine Iteration ihn auf $z_1^* = 0$ abbildet. Für $\frac{b}{a} = 0,5$ hat die Steigung einen konstanten Betrag. Daher ist die Cantor-Menge einheitlich mit exakter geometrischer Selbstähnlichkeit und einer fraktalen Dimension $D = \frac{\ln 2}{\ln b}$. Der Phasenraum hat also eine fraktale Struktur für den Parameterbereich $1 - \frac{b}{a} > \frac{1}{b}$.

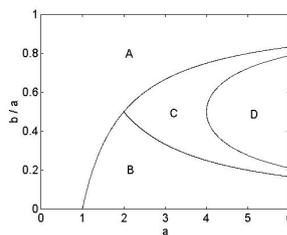


Abbildung 8: Der Parameterraum a gegen $\frac{b}{a}$ für $k = k' = 1$. Bereich A: $z_1^* = 0$ stabil, B: $z_2^* = \frac{1}{1+b}$ stabil, C: Chaos, D: z_1^* stabil zusammen mit fraktaler chaotisch invarianter Menge.

Abbildung 9 zeigt die Verzweigungen der Abbildung für $a = 4$ in Abhängigkeit von $\frac{b}{a}$. Für $\frac{b}{a} < 0,25$ ($b < 1$) ist z_2^* stabil. Bei $\frac{b}{a} = 0,25$ wird der Fixpunkt

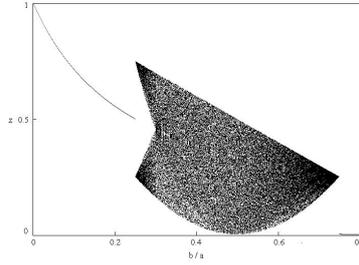


Abbildung 9: Verzweigungsdiagramm für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

instabil und zwei Bänder mit chaotischem Verhalten treten auf. Die chaotischen Bänder treffen mit dem instabilen Fixpunkt z_2^* bei $\frac{b}{a} \approx 0,2985$ zusammen und verschmelzen zu einem chaotischen Band. Bei $\frac{b}{a} = 0,5$ haben wir wieder den Fall, dass der chaotische Orbit das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ gleichmäßig besucht. Schließlich trifft das chaotische Band mit dem instabilen Fixpunkt z_2^* bei $\frac{b}{a} = 0,75$ wieder zusammen, was das chaotische Verhalten zerstört und den Fixpunkt $z_1^* = 0$ stabilisiert ($a - b < 1$).

3.2 $k = k' \neq 1$

Dies bedeutet für die Verbindungsgewichte $\frac{w_{yx}}{w_{xx}} = \frac{w_{yy}}{w_{xy}} = k$ und wieder sei $a > b$. Die Dynamik des Systems wird beschrieben durch:

$$z_{n+1} = F(z_n) = \begin{cases} (a - kb)z_n & , \text{ für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - kbz_n & , \text{ für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 1 - k & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Der Hauptunterschied zum vorherigen Fall ist, dass in diesem System superstabile Orbits der Periode $m \geq 2$ auftreten. Das folgt aus der Existenz eines Gebiets der Steigung Null ($z > \frac{1}{b}$), welches einen Output ungleich Null produziert. Die Fixpunkte dieser Abbildung sind $z_1^* = 0$ und

$$z_2^* = \begin{cases} 1 - k & , \text{ für } 0 < k < 1 - \frac{1}{b}, \\ \frac{1}{1+kb} & , \text{ für } 1 - \frac{1}{b} < k < \frac{a-1}{b}. \end{cases}$$

z_1^* existiert wieder für alle Parameterwerte und ist stabil für $a - kb < 1$. Der Fixpunkt $z_2^* = 1 - k$ ist, falls er existiert, superstabil, da die Steigung in dem Punkt Null ist. Hingegen ist $z_2^* = \frac{1}{1+kb}$ nur stabil, falls $bk < 1$. Sind die Fixpunkte instabil und existiert ein Funktionswert $F(z) > \frac{1}{b}$, dann treten superstabile periodische Orbits auf. Falls kein Fixpunkt stabil ist und kein $F(z) > \frac{1}{b}$ existiert, dann zeigt das System chaotisches Verhalten.

Das Verzweigungsdiagramm in Abbildung 11 zeigt das dynamische Verhalten für $a = 4$ und $b = 2$ in Abhängigkeit von k . Für $0 \leq k < 0,5$ ist der Fixpunkt $z_2^* = 1 - k$ ($0 < k < \frac{1}{b}$) stabil. Bei $k = 0,5$ wird dieser instabil und ein superstabiler 2-periodischer Orbit entsteht. Mit wachsendem k entstehen periodische Orbits aller Längen einem komplizierten Muster folgend bis bei $k = 1$ alle periodischen Orbits instabil werden und das System chaotisch wird. Bei $k = 1,5$ endet das chaotische Verhalten und der Fixpunkt $z_1^* = 0$ wird stabil ($a - kb < 1$).

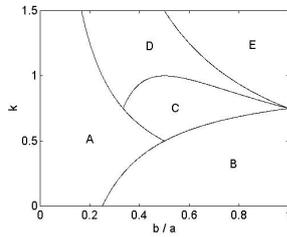


Abbildung 10: Der Parameterraum $\frac{b}{a}$ gegen k für $a = 4$. Bereich A: $z_2^* = \frac{1}{1+kb}$ stabil, B: $z_2^* = 1 - k$ stabil, C: superstabile periodische Orbits, D: Chaos, E: $z_1^* = 0$ stabil.

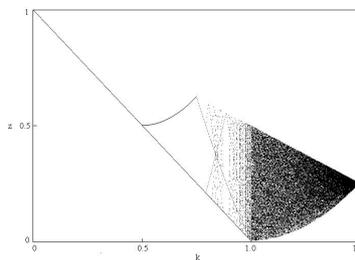


Abbildung 11: Verzweigungsdiagramm für den Parameter $k = k' \neq 1$ bei $a = 4$ und $b = 2$.

4 Eine Anwendung in der Bildsegmentierung

In Anlehnung an das letzte Kapitel werden wir hier zeigen, wie ein Netz bestehend aus den vorgestellten Neuronenpaaren dazu in der Lage ist bei einem gegebenen Bild zwischen „Objekt“ und „Hintergrund“ zu unterscheiden. Dabei werden die Übergänge zwischen verschiedenen Arten von Dynamik (d.h. Fixpunkt und periodischem Verhalten) aufgrund eines konstanten externen Reizes in dem besprochenen Neuronenpaar ausgenutzt.

4.1 Erregendes–hemmendes Neuronenpaar mit sigmoider Aktivierungsfunktion

Wir betrachten unser System wieder in diskreten Zeitschritten, jedoch verwenden wir an dieser Stelle die sigmoide Aktivierungsfunktion:

$$F_{\mu}(z) = \begin{cases} 1 - \exp(-\mu z) & , \text{für } z \geq 0, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt wird das Dynamische System durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F_a(w_{xx}x_n - w_{yx}y_n + I_n) \\ y_{n+1} &= F_b(w_{xy}x_n - w_{yy}y_n + I'_n) \end{aligned}$$

wobei $F_{a,b}$ sigmoide Aktivierungsfunktionen und I, I' externe Reize sind. Wir führen die entsprechenden Parameter- und Variablentransformationen durch und beschränken uns auf den Fall $k = k' = 1$. Da wir im Folgenden zeitunabhängige externe Reize betrachten, setzen wir weiter $I_n = I'_n = I$ und erhalten das vereinfachte Dynamische System:

$$z_{n+1} = F_a(z_n + I) - F_b(z_n + I)$$

Trotz der Einfachheit dieses Modells, zeigt es genau wie das mit der stückweise linearen Aktivierungsfunktion ein breites Spektrum an dynamischem Verhalten (Fixpunkte, periodische Orbits, Chaos).

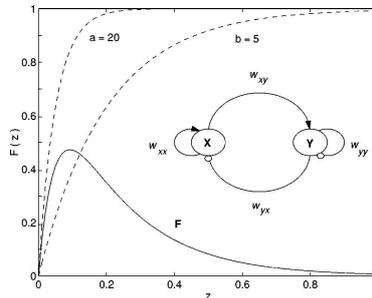


Abbildung 12: Das Dynamische System mit sigmoider Aktivierungsfunktion.

4.1.1 Dynamik eines einzelnen Neuronenpaares

Das Verhalten des Systems ohne externen Reiz ($I = 0$) eines einzelnen Neuronenpaares zeigt bei Variation der Parameter a und b Übergänge von Fixpunkt- zu periodischem und chaotischem Verhalten ähnlich der schon studierten stückweisen linearen Aktivierungsfunktion. Die Abbildung

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

hat zwei Fixpunkte: $z_1^* = 0$ und z_2^* , welcher die Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$ löst. Der Fixpunkt z_1^* ist stabil, falls die Steigung in dem Punkt ($\simeq a - b$) kleiner als 1 ist. Sobald diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist, wird z_1^* instabil und z_2^* stabil. Wächst der Parameter a weiter, treten folgende Effekte auf: Der Fixpunkt z_2^* wird instabil und ein Orbit der Periode 2 tritt auf, wonach mit steigendem Parameterwert eine Reihe von Periodenverdoppelungen und schließlich nur noch chaotisches Verhalten zu beobachten sind. Ein externer Input $I > 0$ verschiebt die Abbildung um den Betrag von I nach links. Dadurch ist z_1^* kein Fixpunkt mehr, während z_2^* jetzt Lösung der Gleichung $z = \exp[-b(z + I)] - \exp[-a(z + I)]$ ist. Die Steigung bei z_2^* sinkt mit wachsendem I , was den umgekehrten Effekt des wachsenden Parameters a hat: Zuerst ist ein Übergang von chaotischem Verhalten zu periodischen Orbits zu beobachten, anschließend Periodenhalbierungen bis das System schließlich Fixpunktverhalten zeigt.

4.1.2 Reaktion auf konstanten externen Reiz

Im Folgenden wollen wir den Einfluss eines konstanten externen Reizes I auf ein einzelnes erregendes-hemmendes Neuronenpaar genauer untersuchen. Die Dynamik wird durch folgende Abbildung beschrieben:

$$z_{n+1} = \exp(-b(z + I)) - \exp(-a(z + I)).$$

Für $I > 0$ muss nur die Stabilität des Fixpunktes ungleich Null untersucht werden und daher sei von nun an $z^* = z_2^*$. Der Fixpunkt liegt immer rechts vom maximalen Funktionswert, d.h. die Steigung ist kleiner Null. Um auf Stabilität zu prüfen, müssen wir also überprüfen, für welches I gilt $F'(z^*) > -1$. Es gilt:

$$z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$$

$$\text{und } F'(z) = -b \exp[-b(z + I)] + a \exp[-a(z + I)]$$

Der kritische Wert für die Stabilität ist $F'(z^*) = -1$:

$$\begin{aligned} -1 &= -b \exp[-b(z^* + I_c)] + a \exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* - b \exp[-a(z^* + I_c)] + a \exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* + (a - b) \exp[-a(z^* + I_c)] \end{aligned}$$

wobei I_c der kritische externe Reiz ist, für den z^* stabil wird. Eine Reihe von Umformungen, welche in [4] nachgelesen werden können, führt auf den folgenden Zusammenhang zwischen den Parameterwerten a, b und I_c

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a} [\ln(\mu a) - 1]$$

wobei $\mu = \frac{b}{a}$.

4.1.3 Parameterwahl nach Aufgabenstellung

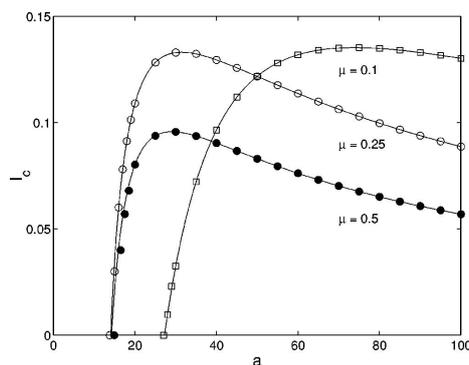


Abbildung 13: Kritischer Wert des externen Reizes (I_c) bei dem der Übergang von periodischem zu Fixpunktverhalten stattfindet. Die Kreise und Quadrate sind Werte, welche für $\mu = 0,1, 0,25$ und $0,5$ numerisch berechnet wurden.

Um das Netzwerk Regionen unterschiedlicher Intensität $I_1 < I_2$ trennen zu lassen, kann man μ festhalten und ein geeignetes a wählen, so dass $I_1 < I_c < I_2$ gilt. Dann werden Elemente welche einen Input der Stärke I_1 erhalten periodisches Verhalten zeigen, während Neuronenpaare, welche einen externen Reiz des Betrages I_2 erhalten, einem Fixpunkt zustreben. Zu beachten ist, dass die Gleichung für ein gegebenes I_c zwei Werte für a liefert. Welcher Parameterwert ist dann der geeignetere? Da die Steigung der Kurve links des Maximums sehr groß ist, deckt eine kleine Änderung von a ein breites Spektrum von möglichen Werten für I_c ab. In diesem Fall ist das System tolerant gegenüber Ungenauigkeiten in der Bestimmung von dem geeigneten Wert I_c . Andererseits ist die Steigung der Kurve rechts des Maximums klein (für große Werte von a erreicht sie fast Null), was bedeutet, dass man in dieser Region selbst bei einer großen Änderung von a fast gleiche Ergebnisse erzielt. In diesem Bereich ist das Netzwerk also tolerant gegenüber Parameteränderungen. Da beide Toleranzeigenschaften (gegenüber Ungenauigkeit in der Bestimmung des kritischen Inputs und gegenüber Parameteränderungen) für ein computerberechnetes Netzwerk sehr wünschenswert sind, muss man hier abwägen. Die Art der Anwendung ist ausschlaggebend, welchen Wert für a man für ein bestimmtes I_c wählt.

4.2 Netz aus erregend-hemmenden Neuronenpaaren

Die Einführung von Verknüpfungen zwischen benachbarten Neuronen führt zu einer Änderung der Reaktion des Netzwerks auf externe Reize. Wir betrachten diskrete Approximationen von kreisförmigen Umgebungen der Radien R_{ex} und R_{in} ($R = 1, 2$) von erregenden und hemmenden Neuronen. Betrachten wir zunächst den Fall $R_{ex} = R_{in}$. Dann wird die Dynamik eines Neuronenpaares im Netzwerk ohne externen Reiz beschrieben durch

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{i \in R_{ex}} z_n^i\right)$$

wobei $|R|$ die Anzahl der Neuronen in einer Umgebung des Radius R ist. Um festzustellen, wie gut das Netzwerk die Segmentierungsaufgabe bewältigt, erhält jedes Element des Netzwerk einen externen Input I . Wir müssen nun noch den Einfluss der Verbindungen zwischen den Neuronen in einer Umgebung auf die Dynamik eines einzelnen erregenden-hemmenden Neuronenpaares berücksichtigen. Diese Verbindungen bewirken in der Praxis einen Ausgleich von Unstetigkeiten in der Bildsegmentierung und verbessern das Ergebnis erheblich. Folgendes Argument macht dies deutlich: Angenommen das i -te Neuronenpaar erhält den Input I während die umgebenden Paare einen Input I' erhalten ($I < I_c < I'$). Ohne Verknüpfungen mit den benachbarten Neuronen nimmt das i -te Paar einen 2-periodischen Orbit an während die umgebenden Paare Fixpunktverhalten zeigen. Um zu untersuchen wie die Verknüpfungen sich auf das Neuronenpaar z^i auswirken, betrachten wir die schrittweise Änderung der Aktivität des Paares

$$\begin{aligned} \Delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_{n-1}^j\right) \end{aligned}$$

wobei die Nachbarelemente alle gegen den Fixpunkt konvergiert sind und somit $\frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_n^j = \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_{n-1}^j = z^*$ gilt. Unter der Annahme, dass $|z_n^j - z^*| \ll 1$ und bei Betrachtung der Linearisierung von der Gleichung am Punkt $z = 2z^* + I$ erhalten wir

$$\delta z_n^i = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{z=2z^*+I} \delta z_{n-1}^i.$$

Vorausgesetzt $I_c - I < z^*$ und $-1 < \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{z=2z^*+I} < 0$ gilt $\delta z_n^i \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Also konvergiert z^i durch die Verknüpfung mit benachbarten Elementen gegen den Fixpunkt und das durch z^i bewertete Bildelement wird während der Segmentierung als Teil seiner Umgebung erkannt.

Nun wollen wir noch auf die Auswirkungen der verschiedenen Radien R_{ex} und R_{in} eingehen. Im Allgemeinen beschreibt die Differentialgleichung

$$z_{n+1} = F \left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{i \in R_{ex}} x_n^i - \frac{1}{|R_{in}|} \sum_{i \in R_{in}} y_n^i \right)$$

die Dynamik des autonomen Netzwerks gekoppelter Neuronenpaare. Dies kann man umformen zu ($x_n^i - y_n^i = z_n^i$)

$$z_{n+1} = F \left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{i \in R_{ex}} z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{i \in R_{ex}} y_n^i - \frac{1}{|R_{in}|} \sum_{i \in R_{in}} y_n^i \right).$$

Für den Fall $R_{ex} = R_{in}$ ergibt sich die oben schon verwendete Form

$$z_{n+1} = F \left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{i \in R_{ex}} z_n^i \right).$$

Man beachte, dass $z_n^i \geq 0$ für alle i . Also strebt dieses System mit wachsendem n gegen einen Zustand ständiger Aktivierung aller Neuronen. Allerdings liefert das Model für die in der Simulation verwendeten Iterationsschritte nahezu identische Ergebnisse für die Fälle $R_{ex} = R_{in}$ und $R_{ex} < R_{in}$.

4.3 Simulation des Netzwerks

Die Leistungsfähigkeit des Netzwerks bezüglich der Segmentierung kann man sich anhand der Beispiele in Abbildung 14 und 15 verdeutlichen. Die Anfangsbedingungen des Netzes sind beliebig zu wählen. Das Bild, auf welches die Segmentierung angewendet werden soll, liefert den externen Input für das Netzwerk. Man fixiert a oder μ und wählt den anderen Parameter unter Berücksichtigung der Helligkeitsverteilung des Bildes aus. Das gestattet eine geeignete Parameterwahl für den kritischen Input I_c , s.d. die Neuronen, welche dem Objekt entsprechen, gegen einen Fixpunkt streben, während jene, die zum Hintergrund gehören, periodisches Verhalten zeigen. In der Praxis verfährt man so, dass nach der festgesetzten Anzahl an Iterationen der Output der Neuronen ausgewertet wird und diejenigen, die ihren Output bei sukzessiven Iterationen nicht ändern (bis auf einen festgelegten Fehler Θ), das Objekt repräsentieren und die Übrigen den Hintergrund.

Das künstliche Bild ist ein Viereck der Intensität I_2 (das Objekt) vor einem Hintergrund der Intensität I_1 ($I_1 < I_2$), welches mit einem konstanten Wert ϵ

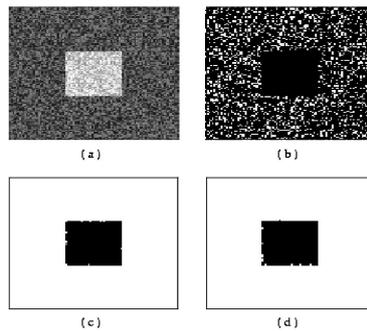


Abbildung 14: Ergebnisse der Segmentierung eines verrauschten künstlichen Bildes nach 200 Iterationen ($a = 20, \mu = 0,25$ und Schwellwert $\Theta = 0,02$): (a) Original, (b) Output des ungekoppelten Netzwerks, (c) Output des gekoppelten Netzwerks für $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) Output des gekoppelten Netzwerks für $R_{ex} = R_{in} = 2$.

verrauscht wurde. Das Signal-Rauschen-Verhältnis (SNR) ist definiert als das Verhältnis von dem Spektrum der Grautöne des Originalbildes zu dem Spektrum des Rauschens (hier: ϵ). Die Resultate der Segmentierung in Abbildung 14 sind für $\text{SNR}=1$ entstanden. Sofort fällt auf, dass die Segmentierungsleistung des ungekoppelten Netzwerks für ein verrauschtes Bild ausgesprochen schlecht ist. Durch die Verknüpfung benachbarter Elemente verbessert sich das Resultat erheblich und das Bild wurde bis auf Teile des Randes korrekt segmentiert. $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und $R_{ex} = R_{in} = 2$ liefern bei 200 Iterationen sehr ähnliche Ergebnisse, wobei Letzteres, wie oben bereits erwähnt, instabil ist.

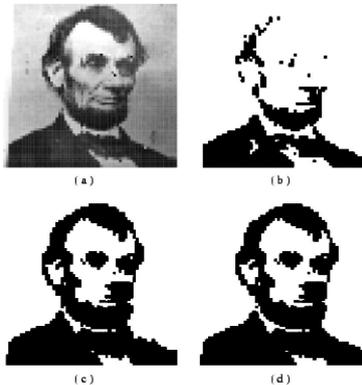


Abbildung 15: Ergebnisse der Segmentierung eines Graustufenbildes von Lincoln nach 300 Iterationen ($a = 30, \mu = 0,25$ und Schwellwert $\Theta = 0,02$): (a) Original, (b) Output des ungekoppelten Netzwerks, (c) Output des gekoppelten Netzwerks für $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) Output des gekoppelten Netzwerks für $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Abbildung 15 zeigt ein 5-Bit Graustufenbild von Abraham Lincoln als Beispiel für die Segmentierung eines echten Bildes. Dabei wurde ein geeigneter Wert I_c durch die Auswertung der Graustufen bestimmt. Genau wie beim künstlichen

Bild ist das Ergebnis des ungekoppelten Netzwerks unbefriedigend. Auch hier verbessert die Verknüpfung der Neuronen die Segmentierung erheblich. Zu beachten ist, dass für das gesamte Bild der Parameter a (und damit I_c) einheitlich gewählt wurde. Wenn man diese Werte für bestimmte Bereiche anhand lokaler Gegebenheiten anpasst, kann die Leistung des Netzwerks weiter verbessert werden.

Literatur

- [1] Raúl Rojas: Theorie der neuronalen Netze. Springer, 1993.
- [2] Wolfram-M. Lippe und Andere: Einführung in Neuronale Netze. <http://wwwmath.uni-muenster.de/SoftComputing/lehre/material/wwwnscript/startseite.html>
- [3] Sitabhra Sinha: Chaotic dynamics in iterated map neural networks with piecewise linear activation function. *Fundamenta Informaticae* 37 (1999) 31-50 (<http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9903009v1>)
- [4] Sitabhra Sinha and Jayanta Basak: Response of an excitatory-inhibitory neural network to external stimulation: An application to image segmentation, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 046112 (1-6) (http://www.imsc.res.in/sitabhra/papers/sinha_basak.pdf)