1 Homologie

1.1 Der induzierte Homomorphismus f_*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sie induziert eine Kettenabbildung $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}'(Y)$, also auch einen Homomorphismus $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

1.2 Eigenschaften von f_*

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$
- $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$

Insbesondere sind also Homotopieäquivalenzen und somit auch Homöomorphismen Isomorphismen auf der Menge der Homotopiegruppen.

1.3 Homologie von Sphären

Für die Homologiegruppen der Sphären gilt:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

2 Abbildungsgrad

2.1 Definition

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ($n > 0$) eine stetige Abbildung und f_* der auf den Homologiegruppen induzierte Homomorphismus. Gilt für einen Erzeuger e von $H_n(\mathbb{S}^n)$:

$$f_{*n}(e) = d \cdot e$$

so setze: $\deg f := d$. Wir nennen $\deg f$ den Abbildungsgrad von f.

2.2 Eigenschaften

- Es gilt $\deg id = 1$.
- Homotope Abbildungen haben den gleichen Grad.
- Ist f nicht surjektiv, so hat f Grad Null.
- Es gilt $\deg fg = \deg f \deg g$.
- Ist f Homotopieäquivalenz, so gibt es eine Abbildung g mit $fg \simeq id$, es folgt also: $\deg f \deg g = 1$, also $\deg f = \pm 1$. Insbesondere haben Homöomorphismen Grad ± 1.

- Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
- Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
- Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$.
- Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei, so folgt $\deg f = (-1)^{n+1}$.

3 Anwendungen

3.1 Definition

Der topologische Grad einer stetigen Abbildung $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0,m)$ ist definiert als:

$$\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) := \deg(\bar{f})$$

3.2 Grad $\leftrightarrow$ Nullstellen

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0,m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) \neq 0$, so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0,m)$ mit $f(x) = 0$.

3.3 Grad(f + Störung) = Grad(f)

Sei $f : (\bar{B}_0^d(0,m), \partial\bar{B}_0^d(0,m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ stetig.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$\sup_{x\in\bar{B}_0^d(0,m)} \|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$

- $g : (\bar{B}_0^d(0,m), \partial\bar{B}_0^d(0,m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
- und $\deg(g, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(f, \bar{B}_0^d(0,m))$.

In Worten: Es gibt um jede Abbildung, die keine Nullstellen auf dem Rand hat, eine Epsilon-Umgebung, in der alle Abbildungen ebenfalls keine Nullstellen auf dem Rand und den gleichen Grad wie f haben.