Fixpunktsätze

Seminar
„Dynamische Systeme und gewöhnliche Differentialgleichungen“

Gundula Meckenhäuser

25. September 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel dieser Seminararbeit ist es den Fixpunktsatz von Brouwer und den Fixpunktsatz von Lefschetz zu beweisen. Da sich die Beweise einiger Bergiffe und Techniken aus der Algebra und Topologie bedienen, werde ich diese in den Abschnitten „Grundlagen“ erläutern.

2 Fixpunktsatz von Brouwer

2.1 Grundlagen – Homotopie

Bezeichnungen. Für $d \geq 0$ setzen wir: $D^{d+1} := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| \leq 1\}$ als $d+1$-dimensionalen Einheitsball und $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ als d-dimensionale Einheitsshpäre. Dabei bezeichne $\| \cdot \|$ die Supremumsnorm.

Definition. Seien X, Y kubische Mengen und $f, g : X \to Y$ eine stetige Abbildung. f heißt zu g *homotop*, i.Z. $f \sim g$, falls eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$H(x,0) = f(x) \ \wedge \ H(x,1) = g(x)$$

Die Abbildung H heißt *Homotopie* zwischen f und g. Die Eigenschaft homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Definition. Zwei kubische Mengen X und Y heißen *homotop*, i.Z. $X \sim Y$, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ gibt, so dass gilt:

$$g \circ f \sim id_X \ \wedge \ f \circ g \sim id_Y$$

Definition. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$ heißt *Retraktion*. Eine *deformierende Retraktion* von X nach A, ist eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to X$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &H(x,0) = x \ \forall \ x \in X \\ &H(x,1) \in A \ \forall \ x \in X \\ &H(a,1) = a \ \forall a \in A \end{aligned}$$

Insbesondere H eine Homotopie zwischen id_X und $r : X \to A$, $x \mapsto H(x,1)$.

Theorem. *Ist $A \subset X$ eine deformierte Retraktion von X, dann sind A und X homotop.*

Definition. Eine kubische Menge X heißt *zusammenziehbar*, falls die identische Abbildung auf X zu einer konstanten Abbildung homotop ist. Äquivalent dazu ist, dass es eine deformierende Retraktion von X auf einen Punkt von X gibt.

Satz (Homotopie – Invarianz)**.** *Seien X und Y kubische Mengen. Sind sie homotop, dann sind ihre Homologiegruppen isomorph:*

$$H_*(X) \cong H_*(Y)$$

2.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Theorem. *Für $d \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) S^d *ist nicht zusammenziehbar.*

(ii) Jede stetige Abbildung $f : D^{d+1} \to D^{d+1}$ *besitzt einen Fixpunkt.*

(iii) Es gibt keine Retraktion von D^{d+1} *nach* S^d*.*

Beweis. Wir zeigen alle Implikationen indirekt:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Angenommen $f : D^{d+1} \to D^{d+1}$ habe keinen Fixpunkt, d.h. für alle $x \in D^{d+1}$ gilt: $f(x) \neq x$. Für $y \in S^d$ und $t \in I = [0,1]$ gilt: $y - tf(y) \neq 0$. Denn:

- Für $t = 1$: $y - f(y) \neq 0$
- Für $t \in [0,1)$: $\|tf(y)\| < \|f(y)\| \leq 1 = \|y\|$

Setze $n : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \to S^d$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Damit ist die Abbildung

$$H_1 : S^d \times I \to S^d,\ (y,t) \mapsto n(y - tf(y))$$

eine Homotopie von id_{S^d} nach $g : S^d \to S^d$, $y \mapsto n(y - f(y))$. Betrachte nun:

$$H_2 : S^d \times I \to S^d,\ (y,t) \mapsto n((1-t)y - f((1-t)y))$$

Diese Abbildung ist eine Homotopie von g nach $k : S^d \to S^d$, $y \mapsto n(-f(0))$. Aus der Transitivität folgt, dass id_{S^d} homotop zur konstanten Abbildung k ist, d.h. S^d ist zusammenziehbar.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Angenommen es gebe eine Retraktion, d.h. eine stetige Abbildung $r : D^{d+1} \to S^d$ mit $r(y) = y$ für alle $y \in S^d$. Dann ist $f : D^{d+1} \to D^{d+1}$, $x \mapsto -r(x)$ eine Abbildung ohne Fixpunkt.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Angenommen S^d sei zusammenziehbar, d.h. es gibt eine Homotopie $H : S^d \times I \to S^d$ mit $H(y,0) = y$ und $H(y,1) = y_0 \in S^d$ für alle $y \in S^d$. Dann ist durch

$$r : D^{d+1} \to S^d,\ x \mapsto \begin{cases} y_0 & \text{falls } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ H(n(x), 2(1 - \|x\|)) & \text{falls } \|x\| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Retraktion definiert. □

Satz. *Alle drei Aussagen des Theorems sind wahr.*

Beweis. Wir zeigen, dass S^d nicht zusammenziehbar ist:
Setze $\Gamma^d := bd[0,1]^{d+1}$, wobei bd den „Rand" bezeichne. Dann gilt:

$$\Gamma^d \cong bd[-1,1]^{d+1} \cong S^d$$

d.h. es gibt eine bijektive, stetige Abbildung $H : \Gamma^d \to S^d$ mit: $H \circ H^{-1} = id_{S^d}$ und $H^{-1} \circ H = id_{\Gamma^d}$. Daraus folgt: $H \circ H^{-1} \sim id_{S^d}$ und $H^{-1} \circ H \sim id_{\Gamma^d}$. Also ist S^d zu Γ^d homotop. Mit der Homotopie – Invarianz und Theorem 9.31 folgt für $d > 0$

$$H_k(S^d) \cong H_k(\Gamma^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0, d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass jede kubische Einpunktmenge azyklisch ist:
Sei $p = [l_1] \times \cdots \times [l_d] \subset \mathbb{R}^d$ eine kubsiche Einpunktmenge. Dann ist

- $\mathcal{K}_0(p) = \{p\} \ \Rightarrow C_0(p) \cong \mathbb{Z}$
- Für $k > 0$ gilt: $\mathcal{K}_k(p) = \emptyset \ \Rightarrow C_k(p) \cong 0$

Betrachte den dazugehörigen Kettenkomplex

$$0 \xleftarrow{\partial_0^p} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1^p} 0 \xleftarrow{\partial_2^p} 0 \ldots$$

Dann ist: $Z_0(p) = \mathbb{Z}$, $B_0(p) = 0$, also: $H_0(p) \cong \mathbb{Z}$. Außerdem ist für $k > 0$: $Z_k(p) = 0$, $B_k(p) = 0$, also: $H_k(p) \cong 0$. Insgesamt:

$$H_k(p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das heißt für $S^0 = \{-1, 1\}$ folgendes: Nach Satz 2.77 gilt: $C_k(X \cup Y) = C_k(X) \oplus C_k(Y)$. Also folgt:

$$H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insgesamt folgt: Sei $p \in S^d$ ein beliebiger Punkt, dann ist p kubisch und für $d \geq 0$ gilt: $H_*(S^d) \ncong H_*(p)$, d.h. S^d ist nicht zu $\{p\}$ homotop. Also ist S^d nicht zusammenziehbar. □

Bemerkung. Die zweite wahre Aussage des Theorems ist der Fixpunktsatz von Brouwer.

3 Fixpunktsatz von Lefschetz

3.1 Spur eines Gruppenhomomorphismus

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Die *Spur* von A ist definiert als Summe der Diagonaleinträge, d.h. $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Sind A und B zwei $n \times n$-Matrizen, so gilt:

$$tr(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = tr(BA)$$

Sei G eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und $\phi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Zu einer festen Basis V von G betrachte man die darstellende Matrix A von ϕ bezüglich V und definiert:

$$tr\phi := tr(A)$$

Diese Definition ist wohldefiniert: Sei V' eine zweite Basis. Dann ist die darstellende Matrix D bezüglich V' gegeben durch: $D = B^{-1}AB$, wobei B die Basiswechselmatrix bezeichne. Dann gilt:

$$tr(D) = tr(B^{-1}AB) = tr(ABB^{-1}) = tr(A)$$

Ist G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, aber nicht frei, so definieren wir die Spur von $\phi : G \to G$ wie folgt: Betrachte den Torsionsbestandteil $T(G)$ von G. Dann ist der Quotient $G/T(G)$ frei und wir betrachten den induzierten Homomorphismus:
$\tilde{\phi} : G/T(G) \to G/T(G)$. Setze: $tr(\phi) := tr(\tilde{\phi})$.

3.2 Grundlagen – Homologieabbildung eines Kettenkomplexes

Definition. Ein *Kettenkomplex* $\mathcal{C} = \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ besteht aus abelschen Gruppen C_k und Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, so dass gilt

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{im}\, \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$$

Die Elemente von C_k nennen wir *Ketten*, die von $Z_k := \ker \partial_k$ *Zykel*, die Elemente von $B_k := \text{im}\, \partial_{k+1}$ *Ränder*. Insbesondere ist jeder Rand ein Zykel.

Definition. Ein *endlich erzeugter freier Kettenkomplex* ist ein Kettenkomplex $\mathcal{C}$ mit den Eigenschaften

- Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist C_k eine endlich erzeugte freie Gruppe.
- Für fast alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $C_k = 0$.

Definition. Die *k-te Homologiegruppe* eines Kettenkomplexes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$H_k(\mathcal{C}) := Z_k/B_k$$

Die *Homologie* von $\mathcal{C}$ ist definiert als Folge aller Homologiegruppen

$$H_*(\mathcal{C}) := \{H_k(\mathcal{C})\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

Definition. Seien $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{C}' := \{C'_k, \partial'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ zwei Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ist eine Folge von Homomorphismen $\{\varphi_k : C_k \to C'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, so dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\partial'_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ \partial_k$$

D.h. dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}: \quad \dots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"'] & \cdots \\
\mathcal{C}': \quad \dots \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Satz. *Ist $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ eine Kettenabbildung, dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\varphi_k(Z_k) \subset Z'_k \ \wedge \ \varphi_k(B_k) \subset B'_k$$

Definition. Sei $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ eine Kettenabbildung. Dann ist die *k–te Homologieabbildung* von φ definiert als

$$\varphi_{*k} : H_k(\mathcal{C}) \to H_k(\mathcal{C}'), \quad \varphi_{*k}([z]) := [\varphi_k(z)]$$

Die *Homologieabbildung* $\varphi_* : H_*(\mathcal{C}) \to H_*(\mathcal{C}')$ von φ ist definiert als Folge alle k–ten Homologieabbildungen: $\varphi_* := \{\varphi_{*k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Definition. Eine Kette $c \in C_k$ heißt *schwacher Rand*, falls es ein $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $\beta c \in B_k$.

Satz. *Es gilt:*

1. *Die Menge W_k aller schwachen Ränder bildet eine Untergruppe von Z_k, die* Gruppe der schwachen Ränder.
2. $Z_k/W_k \cong H_k(\mathcal{C})/T_k$

Beweis. Wir zeigen zuerst: $W_k \subset Z_k$: Sei $c \in C_k$ und $\beta \neq 0$, so dass $\beta c \in B_k$. D.h. $\partial_k(\beta c) = 0 \ \Leftrightarrow \ \beta\partial_k(c) = 0$. Da C_k torsionsfrei ist, folgt: $\partial_k(c) = 0$, also $c \in Z_k$. Die Untergruppenaxiome rechnet man leicht nach: Seien c_1 und c_2 aus W_k mit $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ und $\alpha_1 c_1, \alpha_2 c_2 \in B_k$. Dann ist mit $\beta := \mathrm{kgV}(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ und $\beta c_1,\ \beta c_2 \in B_k$. Also: $\beta(c_1 + c_2) \in B_k$. Mit $\alpha_1 c_1 \in B_k$ folgt: $-\alpha_1 c_1 \in B_k$, also: $-c_1 \in W_k$.
Nun zur Isomorphie. Anwendung des Isomorphiesatzes liefert:

$$H_k/(W_k/B_k) \cong (Z_k/B_k)/(W_k/B_k) \cong Z_k/W_k$$

Es bleibt also $T_k \cong W_k/B_k$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
c \in T_k \subset H_k &\Leftrightarrow c = z + B_k \text{ für ein } z \in Z_k \text{ und es gibt ein } n \neq 0 : n(z + B_k) = B_k \\
&\Leftrightarrow nz \in B_k \\
&\Leftrightarrow z \in W_k \\
&\Leftrightarrow c \in W_k/B_k
\end{aligned}$$

□

3.3 Hopfsche Spurformel

Lemma. *Sei G eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und H eine Untergruppe, so dass G/H frei abelsch ist. Sei $\phi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\phi(H) \subset H$. Dann gilt:*

$$tr(\phi) = tr(\phi') + tr(\phi\mid_H)$$

wobei $\phi' : G/H \to G/H$ der induzierte Homomorphismus ist.

Beweis. Als Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe besitzt H eine Basis $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Sei $W = \{u_1 + H, \ldots, u_n + H\}$ eine Basis von G/H. Da ϕ und ϕ' Gruppenhomomorphismen sind, gibt es ganze Zahlen α_{ij} und β_{ij}, so dass gilt:

$$\phi'(u_j + H) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}(u_i + H)$$
$$\phi\mid_H (v_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} v_i$$

Die darstellenden Matrizen von ϕ' bzw. $\phi\mid_H$ bezüglich W und V sind also durch $B = (\beta_{ij})$ und $A = (\alpha_{ij})$ gegeben. Es gilt: $G \cong G/H \oplus H$, also ist $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k\}$ eine Basis von G und es gilt:

$$\phi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} u_i + h_j \quad \text{mit} \quad h_j \in H$$
$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} v_i$$

D.h. die darstellende Matrix von ϕ bezüglich dieser Basis hat die Form:

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Also: $tr(\phi) = tr(\phi') + tr(\phi\mid_H)$.
Schließlich zeigen wir noch, dass gilt: $G \cong G/H \oplus H$. Betrachte die Sequenz

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 0$$

mit i als Inklusion (injektiv) und π als Projektion (surjektiv). Es gilt: $\ker \pi = \operatorname{im} i$, also ist die Sequenz exakt. Setzt man für Basiselemente g_i von G:

$$\varphi : G/H \to G \quad g_i + H \mapsto g_i$$

dann gilt: $\pi \circ \varphi = id_{G/H}$, d.h. π spaltet und es gilt: $G \cong \operatorname{im} \pi \oplus \operatorname{im} i$, also: $G \cong G/H \oplus H$. $\square$

Das folgende Theorem liefert die Grundlage zum Beweis des Fixpunktsatzes von Leftschetz.

Theorem (Hopfsche Spurformel)**.** *Sei $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein endlich erzeugter freier Kettenkomplex und $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Kettenabbildung. Bezeichne $H_k := H_k(\mathcal{C})$ die k-te Homologiegruppe mit Torsionsbestandteil T_k. Seien $\phi_k : H_k/T_k \to H_k/T_k$ die induzierten Homomorphismen. Dann gilt:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k tr(\varphi_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k tr(\phi_k)$$

Beweis. Für Ränder ($B_K :=$ im ∂_{k+1}), schwache Ränder (W_k), Zykel ($Z_k := \ker\partial_k$) und Ketten (C_k) gelten folgende Enthaltenseinrelationen:

$$B_k \subset W_k \subset Z_k \subset C_k$$

Als erstes zeigen wir, dass B_k, W_k und Z_k unter φ_k invariant sind:

- Es gilt: $\varphi_{k-1}\circ\partial_k(Z_k) = \varphi_{k-1}(0) = 0$. Mit $\varphi_{k-1}\circ\partial_k = \partial_k\circ\varphi_k$ folgt: $\partial_k\circ\varphi_k(Z_k) = 0$. Also: $\varphi_k(Z_k) \subset Z_k$.
- Sei $c \in B_k$, d.h. $c \in$ im ∂_{k+1}, also gibt es ein $\tilde{c} \in C_{k+1} :\ c = \partial_{k+1}(\tilde{c})$.

  $$\varphi_k(c) = \varphi_k \circ \partial_{k+1}(\tilde{c}) = \partial_{k+1} \circ \varphi_{k+1}(\tilde{c}) = \partial_{k+1}(\varphi_{k+1}(\tilde{c})) \in \text{im }\partial_{k+1}$$

  Also: $\varphi_k(B_k) \subset B_k$.
- Sei $c \in W_k$, d.h. $c \in C_k$ und $\beta c \in B_k$. Die φ_k–Invarianz von B_k liefert:

  $$\varphi_k(\beta c) = \beta\varphi_k(c) \in B_k \subset W_k$$

  Also: $\varphi_k(W_k) \subset W_k$.

Daher sind durch $\varphi_k : C_k \to C_k$ folgende Homomorphismen gegeben:

$$\begin{aligned}
&\varphi_k\,|_{W_k}: W_k \to W_k\\
&\varphi'_k : Z_k/W_k \to Z_k/W_k\\
&\varphi''_k : C_k/Z_k \to C_k/Z_k
\end{aligned}$$

Es gilt: $Z_k/W_k \cong H_k/T_k$, d.h. Z_k/W_k ist frei, da H_k/T_k frei ist.
Die Abbildung $\partial_k : C_k \to B_{k-1}$ ist nach Konstruktion ein Epimorphismus. Der Homomorphiesatz liefert: $B_{k-1} \cong C_k/Z_k$. Da B_{k-1} frei ist, besitzt auch C_k/Z_k eine Basis.
Also sind die Qoutienten Z_k/W_k und C_k/Z_k frei und wir können das obige Lemma zweimal anwenden:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi''_k) + tr(\varphi'_k) + tr(\varphi_k\,|_{W_k}) \tag{1}$$

Mit den Isomorphismen $B_{k-1} \cong C_k/Z_k$ und $Z_k/W_k \cong H_k/T_k$ wird (1) zu:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_{k-1} |_{B_{k-1}}) + tr(\phi_k) + tr(\varphi_k |_{W_k}) \tag{2}$$

Nun zeigen wir, dass $tr(\varphi_k |_{W_k}) = tr(\varphi_k |_{B_k})$. Sei $\{u_1, ..., u_l\}$ eine Basis von W_k. Dann gibt es $\alpha_1, .., \alpha_l \in \mathbb{Z}$, so dass $\{\alpha_1 u_1, .., \alpha_l u_l\}$ eine Basis von B_k ist. Also:

$$\varphi_k |_{W_k} (u_j) = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} u_i \tag{3}$$

$$\varphi_k |_{B_k} (\alpha_j u_j) = \sum_{i=1}^{l} b_{ij} \alpha_i u_i \tag{4}$$

Multipliziert man (3) mit α_j, so erhält man (4). Insbesondere haben wir: $\alpha_i a_{ii} = b_{ii} \alpha_i$. Also: $tr(\varphi_k |_{W_k}) = tr(\varphi_k |_{B_k})$. Aus (2) erhalten wir damit:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_{k-1} |_{B_{k-1}}) + tr(\phi_k) + tr(\varphi_k |_{B_k})$$

Multiplikation mit $(-1)^k$ und Summation liefert die Hopfsche Spurformel. □

3.4 Grundlagen – Homologieabbildung einer stetigen Abbildung

Definition. Ein *Elementarintervall* ist ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ der Form

$$I = [l, l+1],\ I = [l] \text{ mit } l \in \mathbb{Z}$$

Ein *Elementarwürfel* Q ist ein endliches Produkt von Elementarintervallen, d.h. $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$. Wir setzen:

$$\mathcal{K}^d := \{Q \subset \mathbb{R}^d : Q \text{ ist Elementarwürfel}\}$$
$$\mathcal{K} := \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathcal{K}^d$$

Die *Einbettungszahl* von $Q \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als: $\mathrm{emb}(Q) := d$. Die *Dimension* von Q ist definiert als Anzahl der nichtausgearteten Elementarintervalle. Wir setzen:

$$\mathcal{K}_k := \{Q \in \mathcal{K} : \dim(Q) = k\}$$
$$\mathcal{K}_k^d := \mathcal{K}_k \cap \mathcal{K}^d$$

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt *kubisch*, falls X eine endliche Vereinigung von Elementarwürfeln ist. Für eine kubische Menge X setzen wir:

$$\mathcal{K}(X) := \{Q \in \mathcal{K} : Q \subset X\}$$
$$\mathcal{K}_k(X) := \{Q \in \mathcal{K}(X) : \dim(Q) = k\}$$

Definition. Einem Elementarwürfel $Q \in \mathcal{K}_k^d$ im $\mathbb{R}^d$ der Dimension k ordnen wir wie folgt ein algebraisches Objekt $\widehat{Q}$ zu:

$$\widehat{Q} : \mathcal{K}_k^d \to \mathbb{Z}, \quad \widehat{Q}(P) := \begin{cases} 1 & P = Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung $\widehat{Q}$ heißt *elementare k-Kette im $\mathbb{R}^d$*. Wir setzen:

$$\widehat{\mathcal{K}}_k^d := \{\widehat{Q} : Q \in \mathcal{K}_k^d\}, \quad \widehat{\mathcal{K}}^d := \bigcup_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}_k^d$$

Definition. Für $X \subset \mathbb{R}^d$ kubisch setzen wir

$$\widehat{\mathcal{K}}_k(X) := \{\widehat{Q} : Q \in \mathcal{K}_k(X)\}$$

Die von der Menge $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ erzeugte freie abelsche Gruppe $C_k(X)$ heißt *Gruppe der kubischen k–Ketten von X*. Insbesondere ist $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ eine Basis von $C_k(X)$.

Definition. Eine *mehrwertige* Abbildung $F : X \rightrightarrows Y$ ist eine Abbildung, so dass für alle $x \in X$ gilt: $F(x) \subset Y$.
Eine mehrwertige Abbildung heißt *kubisch*, falls

- Für alle $x \in X$ gilt: $F(x)$ ist kubisch.
- Für alle $Q \in \mathcal{K}(X)$ gilt: $F\,|_{\overset{\circ}{Q}}$ ist konstant.

Eine mehrwertige Abbidlung $F : X \rightrightarrows Y$ heißt *schwach halbstetig*, falls für jedes offene $U \subset Y$ die Menge

$$F^{*-1}(U) := \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

offen ist.

Definition. Eine kubische, mehrwertige Abbildung $F : X \rightrightarrows Y$ heißt *azyklisch*, falls für jedes $x \in X$ die Menge $F(x)$ azyklisch ist.

Theorem. *Sei $F : X \rightrightarrows Y$ eine schwach halbstetige, azyklische, kubische Abbildung. Dann gibt es eine Kettenabbildung $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, so dass gilt:*

- $|\varphi(\widehat{Q})| \subset F(\overset{\circ}{Q})$ *für alle* $Q \in \mathcal{K}(X)$.
- $\varphi(\widehat{Q}) \in \widehat{\mathcal{K}}_0(F(Q))$ *für alle* $Q \in \mathcal{K}_0(X)$.

Für $c \in C_k(X)$ bezeichne $|c| := \cup\{P \in \mathcal{K}_k(X) : c(P) \neq 0\}$ den Träger von c. Diese Kettenabbildung heißt Kettenselektor.

Bemerkung. Dabei bezeichnet $\mathcal{C}(X)$ einen kubischen Kettenkomplex. Die Konstruktion interessiert uns an dieser Stelle nicht. Mit kubischen Kettenkomplexen arbeitet man wie mit „normalen“ Kettenkomplexen, wie sie in 3.2 eingeführt sind.

Theorem. *Sei $F : X \Rightarrow Y$ schwach halbstetig, azyklisch und kubisch. Seien $\varphi, \theta : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ Kettenselektoren. Dann induzieren sie dieselben Homologieabbildungen.*

Definition. Sei $F : X \Rightarrow Y$ eine schwach halbstetige, azyklische und kubsiche Abbildung. Sei $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ ein Kettenselektor von F. Dann ist die Homologieabbildung $F_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ von F definiert über die Homologieabbildung von φ: $F_* := \varphi_*$.

Definition. Seien X, Y kubisch und $f : X \to Y$ stetig. Die Abbildung

$$M_f : X \Rightarrow Y, \quad x \mapsto ch(f(ch(x)))$$

heißt *minimale Darstellung* von f. Dabei bezeichnet ch die abgeschlossene Hülle, d.h. $ch(A) := \bigcup\{Q \in \mathcal{K} : \overset{\circ}{Q} \cap A \neq \emptyset\}$ für ein beschränktes $A \subset \mathbb{R}^d$. M_f ist schwach halbstetig und kubsich. Ist sie sogar azyklisch, so definieren wir die Homologieabbildung von f als: $f_* := (M_f)_*$.

Definition. Ein Vektor der Form $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$ heißt *Skalierungsvektor*. Eine *Skalierung* ist eine Abbildung

$$\Lambda^\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_d x_d)$$

Für eine kubische Menge X setzen wir: $\Lambda^\alpha_X := \Lambda^\alpha |_X$ und $X^\alpha := \Lambda^\alpha_X(X)$. Mit

$$\Omega^\alpha_X : X^\alpha \to X, \quad x \mapsto (\alpha_1^{-1} x_1, \ldots, \alpha_d^{-1} x_d)$$

gilt: $(\Omega^\alpha_X) = (\Lambda^\alpha_X)^{-1}$.

Satz. *Sei X eine kubische Menge und α ein Skalierungsvektor. Dann gilt:*

1. *$M_{\Lambda^\alpha_X} : X \Rightarrow X^\alpha$ ist azyklisch.*
2. *$M_{\Omega^\alpha_X} : X^\alpha \Rightarrow X$ ist azyklisch.*
3. *$(\Omega^\alpha_X)_* = (\Lambda^\alpha_X)_*^{-1}$.*

Theorem. *Seien X, Y kubisch und $f : X \to Y$ stetig. Dann existiert ein Skalierungsvektor α, so dass M_{f^α} azyklisch ist. Dabei ist $f^\alpha := f \circ \Omega^\alpha_X$.*

Definition. Seien X, Y kubisch und $f : X \to Y$ stetig. Sei α ein Skalierungsvektor, so dass M_{f^α} azyklisch ist. Dann setzen wir:

$$f_* : H_*(X) \to H_*(Y), \quad f_* := (f^\alpha)_* \circ (\Lambda^\alpha_X)_*$$

Diese Definition ist unabhängig vom Skalierungsvektor.

3.5 Fixpunktsatz von Lefschetz

Definition. Sei X eine kubische Menge und $f : X \to X$ stetig. Die *Lefschetz-Zahl* von f ist definiert als:

$$L(f) := \sum_k (-1)^k tr(f_{*k})$$

Theorem. *Sei X eine kubische Menge und $f : X \to X$ stetig. Ist $L(f) \neq 0$, dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis des Fixpunktsatzes von Lefschetz. Wir zeigen die Behauptung indirekt.
Angenommen f besitze keinen Fixpunkt. Setze

$$\varepsilon := \inf_{x \in X} \|x - f(x)\|$$

Da kubische Mengen kompakt sind und die Abbildung

$$x \mapsto \|x - f(x)\|$$

stetig ist, nimmt sie in einem Punkt $x_0 \in X$ ihr Minimum an. Also: $\varepsilon = \|x_0 - f(x_0)\|$.
Sei $m > \frac{2}{\varepsilon}$ und $\alpha = (m, \ldots, m)$ ein Skalierungsvektor. Betrachte die Abbildung

$$g := \Lambda_X^\alpha \circ f \circ \Omega_X^\alpha : X^\alpha \to X^\alpha$$

Behauptung: Für jedes $y \in X^\alpha$ gilt:

$$\|y - g(y)\| > 2 \tag{5}$$

Bew. Mit $x = \Omega_X^\alpha(y)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\|y - g(y)\| &= \|\Lambda_X^\alpha(\Omega_X^\alpha(y)) - \Lambda_X^\alpha(f(\Omega_X^\alpha(y)))\| \\
&= \|\Lambda_X^\alpha(x - f(x))\| \\
&= m\|x - f(x)\| > \frac{2}{\varepsilon}\varepsilon > 2
\end{aligned}$$

Behauptung: Gilt: $f(x) \neq x$ für alle $x \in X$, dann folgt:

$$Q \cap ch(g(Q)) = \emptyset \ \ \forall\, Q \in \mathcal{K}(X^\alpha) \tag{6}$$

Bew. Angenommen $x \in Q \cap ch(g(Q))$. Damit erhalten wir: $\mathrm{dist}(x, g(Q)) \leq 1$. Also gibt es ein $y \in Q$ mit $\|x - g(y)\| \leq 1$ und:

$$\|y - g(y)\| \leq \|y - x\| + \|x - g(y)\| \leq 2$$

Widerspruch zu (5).
Sei β ein Skalierungsvektor, so dass die minimale Darstellung $M_{g^\beta} : X^{\alpha\beta} \rightrightarrows X^\alpha$ von $g^\beta := g \circ \Omega_{X^\alpha}^\beta : X^{\alpha\beta} \to X^\alpha$ azyklisch ist. Sei

$$\psi : \mathcal{C}(X^{\alpha\beta}) \to \mathcal{C}(X^\alpha)$$

ein Kettenselektor bezüglich dieser Darstellung. Außerdem ist auch die minimale Darstellung $M_{\Lambda^{\beta}_{X^\alpha}} : X^\alpha \Rightarrow X^{\alpha\beta}$ azyklisch. Sei

$$\theta : \mathcal{C}(X^\alpha) \to \mathcal{C}(X^{\alpha\beta})$$

ein dazugehöriger Kettenselektor. Die Homologieabbildung $g_* : H_*(X^\alpha) \to H_*(X^\alpha)$ ist dann definiert als:

$$g_* := (g \circ \Omega^{\beta}_{X^\alpha})_* \circ (\Lambda^{\beta}_{X^\alpha})_* = \psi_* \circ \theta_*$$

Behauptung:

$$Q \cap |\psi_k \circ \theta_k(\widehat{Q})| = \emptyset \ \ \forall\ Q \in \mathcal{K}_k(X^\alpha),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Bew. Angenommen $x \in Q \cap |\psi_k \circ \theta_k(\widehat{Q})|$. Dann folgt aus den Eigenschaften eines Kettenselektors, dass

$$|\psi_k \circ \theta_k(\widehat{Q})| \subset \bigcup \{M_{g^\beta}(\overset{\circ}{P}) \mid P \in \mathcal{K}(|\theta(\widehat{Q})|)\}$$

Also gibt es ein $P \subset |\theta_k(\widehat{Q})|$, so dass $x \in M_{g^\beta}(\overset{\circ}{P})$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} |\theta_k(\widehat{Q})| \subset M_{\Lambda^{\beta}_{X^\alpha}}(\overset{\circ}{Q}) &= ch(\Lambda^{\beta}_{X^\alpha}(ch(\overset{\circ}{Q}))) \\ &= ch(\Lambda^{\beta}_{X^\alpha}(Q)) = \Lambda^{\beta}_{X^\alpha}(Q) \end{aligned}$$

Also: $P \subset \Lambda^{\beta}_{X^\alpha}(Q)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x \in M_{g^\beta}(\overset{\circ}{P}) &= ch(g^\beta(ch(\overset{\circ}{P}))) \\ &= ch(g \circ \Omega^{\beta}_{X^\alpha}(P)) \\ &\subset ch(g \circ \Omega^{\beta}_{X^\alpha} \circ \Lambda^{\beta}_{X^\alpha}(Q)) \\ &= ch(g(Q)) \end{aligned}$$

Widerspruch zu (6).
Die Gleichung (7) impliziert, dass die Diagonaleinträge der darstellenden Matrix von $\psi_k \circ \theta_k$ bezüglich der Basis $\widehat{\mathcal{K}}_k(X^\alpha)$ alle Null sind, d.h. $tr(\psi_k \circ \theta_k) = 0$ für alle k. Mit der Hopschen Spurfomel folgt: $L(g) = 0$. Schließlich folgt mit $(\Lambda^{\alpha}_X)_* = ((\Omega^{\alpha}_X)_*)^{-1}$:

$$\begin{aligned} &L(g) = 0 \Rightarrow \\ &\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i tr(g_{*k}) = 0 \Rightarrow \\ &\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i tr((\Lambda^{\alpha}_X)_{*k} \circ f_{*k} \circ (\Omega^{\alpha}_X)_{*k}) = 0 \Rightarrow \\ &\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i tr(f_{*k}) = 0 \end{aligned}$$

Also: $L(f) = 0$. $\square$

3.6 Anwendungen

Theorem. *Sei X eine azyklische kubische Menge und $f : X \to X$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist X azyklisch, also gilt für ihre Homologiegruppen:

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

X zusammenhängend und für zusammenhängende kubische Mengen gilt nach Satz 6.60: Die Homologieabbildung $f_{*0} : H_0(X) \to H_0(X)$ ist die identische Abbildung. Also gilt: $L(f) \neq 0$. Mit dem Fixpunktsatz von Lefschetz folgt die Behauptung. □

Korollar. *Sei $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ ein Fluss auf einer azyklischen, kubischen Menge X. Dann besitzt φ eine Ruhelage.*

Beweis. Für jedes $\tau > 0$ ist φ_τ stetig und nach obigem Theorem besitzt die Zeit–τ–Abbildung einen Fixpunkt. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Zeitfolge, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Für jedes t_n gibt es ein x_n, so dass $\varphi(x_n, t_n) = x_n$. Weil X kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $y = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}$. Sei s_m die minimale Periode von x_{n_m}. Wir zeigen nun, dass y eine Ruhelage ist, d.h.

$$\varphi(t, y) = y \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Angenommen y sei keine Ruhelage, dann gibt es ein $\tau > 0$, so dass $\varphi(\tau, y) = z \neq y$. Wir finden also ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|z - y\| > \varepsilon \tag{8}$$

Aus der Stetigkeit des Flusses folgt: $\lim_{m\to\infty} \varphi(\tau, x_{n_m}) = z$. Betrachte die Menge $\varphi([0, s_m), x_{n_m})$. Da s_m die minimale Periode von x_{n_m} ist, folgt: $\varphi(\mathbb{R}, x_{n_m}) = \varphi([0, s_m), x_{n_m})$. Schließlich erhält man aufgrund der Stetigkeit von φ:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(\varphi(\mathbb{R}, x_{n_m}) = 0$$

Widerspruch zu (8). □

Definition. Sei X eine kubische Menge. Die *Euler-Zahl* von X ist definiert als:

$$E(X) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i(X)$$

dabei steht $\beta_i(X)$ für die Betti-Zahl von $H_i(X)$, d.h.

$$\beta_i(X) := r \;\Leftrightarrow H_i(X) = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$$

Theorem. *Sei $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ ein Fluss auf einer kubischen Menge X. Ist $E(X) \neq 0$, dann besitzt φ eine Ruhelage.*

Beweis. Für jedes $\tau \geq 0$ ist φ_τ zu id_X homotop:
Setze $H : X \times [0, 1] \to X$, $(x, t) \mapsto \varphi_{t\tau}(x)$. Damit gilt: $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = \varphi_\tau(x)$. □

Literatur

[1] Kaczynski, Tomasz; Mischaikow, Konstantin Michael; Mrozek, Marian: *Computational Homology*. Springer, 2004.