Fixpunktsätze

Gundula Meckenhäuser

26. August 2007

Grundlagen

Bezeichnungen

Für $d \geq 0$ setzen wir: $D^{d+1} := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| \leq 1\}$ als $d+1$-dimensionalen Einheitsball und $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ als d-dimensionale Einheitsshpäre. Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm.

Grundlagen

Definition

Seien X, Y kubisch und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. f heißt zu g *homotop*, i.Z. $f \sim g$, falls eine stetige Abbildung (*Homotopie*) $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$H(x,0) = f(x) \;\wedge\; H(x,1) = g(x)$$

Die Eigenschaft homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Grundlagen

Definition

Seien X, Y kubisch und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. f heißt zu g *homotop*, i.Z. $f \sim g$, falls eine stetige Abbildung (*Homotopie*) $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$H(x,0) = f(x) \ \wedge \ H(x,1) = g(x)$$

Die Eigenschaft homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Zwei kubische Mengen X und Y heißen *homotop*, i.Z. $X \sim Y$, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ gibt, so dass gilt:

$$g \circ f \sim id_X \ \wedge \ f \circ g \sim id_Y$$

Grundlagen

Definition

Seien X, Y kubisch und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. f heißt zu g *homotop*, i.Z. $f \sim g$, falls eine stetige Abbildung (*Homotopie*) $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$H(x,0) = f(x) \;\wedge\; H(x,1) = g(x)$$

Die Eigenschaft homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation.
Zwei kubische Mengen X und Y heißen *homotop*, i.Z. $X \sim Y$, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ gibt, so dass gilt:

$$g \circ f \sim id_X \;\wedge\; f \circ g \sim id_Y$$

Grundlagen

Definition

Eine kubische Menge X heißt *zusammenziehbar*, falls die identische Abbildung auf X zu einer konstanten Abbildung homotop ist. Äquivalent dazu ist, dass X zu $\{x\}$ mit $x \in X$ homotop ist.

Satz (Homotopie – Invarianz)

Seien X und Y kubische Mengen. Sind sie homotop, dann sind ihre Homologiegruppen isomorph:

$$H_*(X) \cong H_*(Y)$$

Theorem

Satz (Fixpunktsatz von Brouwer)

Jede stetige Abbildung $f : D^{d+1} \longrightarrow D^{d+1}$ besitzt einen Fixpunkt.

Theorem

Für $d \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *S^d ist nicht zusammenziehbar.*

(ii) *Jede stetige Abbildung $f : D^{d+1} \longrightarrow D^{d+1}$ besitzt einen Fixpunkt.*

(iii) *Es gibt keine Retraktion von D^{d+1} nach S^d.*

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$

Angenommen $f : D^{d+1} \to D^{d+1}$ habe keinen Fixpunkt, d.h. für alle $x \in D^{d+1}$ gilt: $f(x) \neq x$. Für $y \in S^d$ und $t \in I = [0,1]$ gilt: $y - tf(y) \neq 0$. Denn:

- Für $t = 1$: $y - f(y) \neq 0$
- Für $t \in [0,1)$: $\|tf(y)\| < \|f(y)\| \leq 1 = \|y\|$

Setze $n : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \to S^d$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Damit ist die Abbildung

$$H_1 : S^d \times I \to S^d,\ (y,t) \mapsto n(y - tf(y))$$

eine Homotopie von id_{S^d} nach $g : S^d \to S^d$, $y \mapsto n(y - f(y))$.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$

Betrachte nun:

$$H_2 : S^d \times I \to S^d,\ (y,t) \mapsto n((1-t)y - f((1-t)y))$$

Diese Abbildung ist eine Homotopie von g nach $k : S^d \to S^d$, $y \mapsto n(-f(0))$. Aus der Transitivität folgt, dass id_{S^d} homotop zur konstanten Abbildung k ist, d.h. S^d ist zusammenziehbar.

Beweis $(ii) \Rightarrow (iii)$

Angenommen es gebe eine Retraktion, d.h. eine stetige Abbildung $r : D^{d+1} \to S^d$ mit $r(y) = y$ für alle $y \in S^d$. Dann ist

$$f : D^{d+1} \to D^{d+1},\ x \mapsto -r(x)$$

eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt.

Beweis $(iii) \Rightarrow (i)$

Angenommen S^d sei zusammenziehbar, d.h. es gibt eine Homotopie $H : S^d \times I \to S^d$ mit $H(y, 0) = y$ und $H(y, 1) = y_0 \in S^d$ für alle $y \in S^d$. Dann ist durch

$$r : D^{d+1} \to S^d, \ x \mapsto \begin{cases} y_0 & \text{falls } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ H(n(x), 2(1 - \|x\|)) & \text{falls } \|x\| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Retraktion definiert. $\square$

Satz

Satz

Alle drei Aussagen des Theorems sind wahr.

Beweis

Wir zeigen, dass S^d nicht zusammenziehbar ist:

- Mit $\Gamma^d := bd[0,1]^{d+1}$ gilt: $\Gamma^d \cong bd[-1,1]^{d+1} \cong S^d$. Also: $\Gamma^d \sim S^d$. Daraus folgt für $d > 0$:

$$H_k(S^d) \cong H_k(\Gamma^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0, d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für $d = 0$ gilt:

$$H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

- Sei $p \in S^d$, dann gilt:

$$H_k(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insgesamt haben wir also: $H_*(S^d) \ncong H_*(\{p\})$, d.h. S^d ist nicht zu $\{p\}$ homotop, also nicht zusammenziehbar. $\square$

Spur eines Homomorphismus'

Sei G eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und $\phi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Zu einer festen Basis V von G betrachte man die darstellende Matrix A von ϕ bezüglich V und definiert:

$$tr\phi := tr(A)$$

Ist G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, aber nicht frei, so definieren wir die Spur von $\phi : G \to G$ wie folgt: Betrachte den Torsionsbestandteil $T(G)$ von G. Dann ist der Quotient $G/T(G)$ frei und wir betrachten den induzierten Homomorphismus: $\tilde{\phi} : G/T(G) \to G/T(G)$. Setze:

$$tr(\phi) := tr(\tilde{\phi})$$

Lemma

Lemma

Sei G eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und H eine Untergruppe, so dass G/H frei abelsch ist. Sei $\phi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\phi(H) \subset H$. Dann gilt:

$$tr(\phi) = tr(\phi') + tr(\phi \mid_H)$$

wobei $\phi' : G/H \to G/H$ der induzierte Homomorphismus ist.

Beweis

Sei $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von H.
Sei $W = \{u_1 + H, \dots, u_n + H\}$ eine Basis von G/H. Die darstellenden Matrizen $B = (\beta_{ij})$ und $A = (\alpha_{ij})$ von ϕ' bzw. $\phi\mid_H$ bezüglich W und V sind gegeben durch:

$$\phi'(u_j + H) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}(u_i + H)$$

$$\phi\mid_H (v_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} v_i$$

Beweis

Es gilt: $G \cong G/H \oplus H$, also ist $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von G und es gilt:

$$\phi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} u_i + h_j \quad \text{mit} \quad h_j \in H$$

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} v_i$$

D.h. die darstellende Matrix von ϕ bzgl. dieser Basis hat die Form:

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Also: $tr(\phi) = tr(\phi') + tr(\phi\mid_H)$.

Grundlagen

Definition

Ein *endlich erzeugter freier Kettenkomplex* $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ besteht aus endlich erzeugten freien abelschen Gruppen C_k, wobei $C_k = 0$ für fast alle k und Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$:

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{im}\, \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$$

Die Elemente von C_k nennen wir *Ketten*, die von $Z_k := \ker \partial_k$ *Zykel* und die von $B_k := \text{im}\, \partial_{k+1}$ *Ränder*.

Grundlagen

Definition

Ein *endlich erzeugter freier Kettenkomplex* $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ besteht aus endlich erzeugten freien abelschen Gruppen C_k, wobei $C_k = 0$ für fast alle k und Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$:

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{im} \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$$

Die Elemente von C_k nennen wir *Ketten*, die von $Z_k := \ker \partial_k$ *Zykel* und die von $B_k := \operatorname{im} \partial_{k+1}$ *Ränder*.

Die *k–te Homologiegruppe* eines Kettenkomplexes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$H_k(\mathcal{C}) := Z_k / B_k$$

Die *Homologie* von $\mathcal{C}$ ist definiert als: $H_*(\mathcal{C}) := \{H_k(\mathcal{C})\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Grundlagen

Definition

Ein *endlich erzeugter freier Kettenkomplex* $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ besteht aus endlich erzeugten freien abelschen Gruppen C_k, wobei $C_k = 0$ für fast alle k und Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$:

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{im} \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$$

Die Elemente von C_k nennen wir *Ketten*, die von $Z_k := \ker \partial_k$ *Zykel* und die von $B_k := \operatorname{im} \partial_{k+1}$ *Ränder*.
Die *k–te Homologiegruppe* eines Kettenkomplexes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$H_k(\mathcal{C}) := Z_k / B_k$$

Die *Homologie* von $\mathcal{C}$ ist definiert als: $H_*(\mathcal{C}) := \{H_k(\mathcal{C})\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Grundlagen

Definition

Seien $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{C}' := \{C'_k, \partial'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ist eine Folge von Homomorphismen $\{\varphi_k : C_k \to C'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, so dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\partial'_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ \partial_k$$

D.h. dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} : & \ldots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"'] & \cdots \\
\mathcal{C}' : & \ldots \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Grundlagen

Definition

Seien $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{C}' := \{C'_k, \partial'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ist eine Folge von Homomorphismen $\{\varphi_k : C_k \to C'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, so dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\partial'_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ \partial_k$$

D.h. dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}: & \ldots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"'] & \cdots \\
\mathcal{C}': & \ldots \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Grundlagen

Definition

Sei $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ eine Kettenabbildung. Dann ist die *k–te Homologieabbildung* von φ definiert als

$$\varphi_{*k} : H_k(\mathcal{C}) \to H_k(\mathcal{C}'), \quad \varphi_{*k}([z]) := [\varphi_k(z)]$$

Die *Homologieabbildung* $\varphi_* : H_*(\mathcal{C}) \to H_*(\mathcal{C}')$ von φ ist definiert als Folge alle k–ten Homologieabbildungen: $\varphi_* := \{\varphi_{*k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
Veranschaulichung:

$$\begin{tikzcd} Z_k \arrow[r, "\varphi_k|_{Z_k}"] \arrow[d, "\pi"'] & Z_k' \arrow[d, "\pi"'] \\ H_k \arrow[r, "\varphi_{*k}"] & H_k' \end{tikzcd}$$

Grundlagen

Definition

Eine Kette $c \in C_k$ heißt *schwacher Rand*, falls es ein $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $\beta c \in B_k$.

Satz

Es gilt:

- *Die Menge W_k aller schwachen Ränder bildet eine Untergruppe von Z_k.*
- $Z_k / W_k \cong H_k(\mathcal{C}) / T_k$

Hopfsche Spurenformel

Theorem (Hopfsche Spurenformel)

Sei $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein endlich erzeugter freier Kettenkomplex und $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Kettenabbildung. Bezeichne $H_k := H_k(\mathcal{C})$ die k-te Homologiegruppe mit Torsionsbestandteil T_k. Seien $\tilde{\phi}_k : H_k/T_k \to H_k/T_k$ die induzierten Homomorphismen. Dann gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k tr(\varphi_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k tr(\tilde{\phi}_k)$$

Beweis

- Für Ränder ($\in B_k$), Schwache Ränder ($\in W_k$), Zykel ($\in Z_k$) und Ketten ($\in C_k$) gelten folgende Enthaltenseinrelationen:

$$B_k \subset W_k \subset Z_k \subset C_k$$

- Außerdem sind sie unter φ_k invariant, d.h. wir haben folgende Homomorphismen:

$$\varphi_k \mid_{W_k} : W_k \to W_k$$
$$\varphi'_k : Z_k / W_k \to Z_k / W_k$$
$$\varphi''_k : C_k / Z_k \to C_k / Z_k$$

Beweis

- Für Ränder ($\in B_k$), Schwache Ränder ($\in W_k$), Zykel ($\in Z_k$) und Ketten ($\in C_k$) gelten folgende Enthaltenseinrelationen:

$$B_k \subset W_k \subset Z_k \subset C_k$$

- Außerdem sind sie unter φ_k invariant, d.h. wir haben folgende Homomorphismen:

$$\begin{aligned} \varphi_k \mid_{W_k} &: W_k \to W_k \\ \varphi'_k &: Z_k / W_k \to Z_k / W_k \\ \varphi''_k &: C_k / Z_k \to C_k / Z_k \end{aligned}$$

Beweis

- Betrachte den Epimorphismus $\partial_k : C_k \to B_{k-1}$. Der Homomorphiesatz liefert: $B_{k-1} \cong C_k/Z_k$. Also ist C_k/Z_k frei, d.h. wir können das obige Lemma anwenden:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_k'') + tr(\varphi_k\mid_{Z_k})$$

- Es gilt: $H_k/T_k \cong Z_k/W_k$, d.h. Z_k/W_k ist frei und das Lemma liefert:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_k'') + tr(\varphi_k') + tr(\varphi_k\mid_{W_k})$$

Beweis

- Betrachte den Epimorphismus $\partial_k : C_k \to B_{k-1}$. Der Homomorphiesatz liefert: $B_{k-1} \cong C_k / Z_k$. Also ist C_k / Z_k frei, d.h. wir können das obige Lemma anwenden:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_k'') + tr(\varphi_k \mid_{Z_k})$$

- Es gilt: $H_k / T_k \cong Z_k / W_k$, d.h. Z_k / W_k ist frei und das Lemma liefert:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_k'') + tr(\varphi_k') + tr(\varphi_k \mid_{W_k})$$

- Mit den Isomorphismen $B_{k-1} \cong C_k / Z_k$ und $Z_k / W_k \cong H_k / T_k$ erhalten wir:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_{k-1} \mid_{B_{k-1}}) + tr(\tilde{\phi}_k) + tr(\varphi_k \mid_{W_k}) \qquad (1)$$

Beweis

- Betrachte den Epimorphismus $\partial_k : C_k \to B_{k-1}$. Der Homomorphiesatz liefert: $B_{k-1} \cong C_k/Z_k$. Also ist C_k/Z_k frei, d.h. wir können das obige Lemma anwenden:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_k'') + tr(\varphi_k \mid_{Z_k})$$

- Es gilt: $H_k/T_k \cong Z_k/W_k$, d.h. Z_k/W_k ist frei und das Lemma liefert:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_k'') + tr(\varphi_k') + tr(\varphi_k \mid_{W_k})$$

- Mit den Isomorphismen $B_{k-1} \cong C_k/Z_k$ und $Z_k/W_k \cong H_k/T_k$ erhalten wir:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_{k-1} \mid_{B_{k-1}}) + tr(\tilde{\phi}_k) + tr(\varphi_k \mid_{W_k}) \qquad (1)$$

Beweis

- Sei $\{u_1, ..., u_l\}$ eine Basis von W_k. Dann gibt es $\alpha_1, .., \alpha_l \in \mathbb{Z}$, so dass $\{\alpha_1 u_1, .., \alpha_l u_l\}$ eine Basis von B_k ist. Also:

$$\varphi_k |_{W_k} (u_j) = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} u_i \tag{2}$$

$$\varphi_k |_{B_k} (\alpha_j u_j) = \sum_{i=1}^{l} b_{ij} \alpha_i u_i \tag{3}$$

- Multipliziert man (2) mit α_j, so erhält man (3). Also: $\alpha_i a_{ii} = b_{ii}\alpha_i$, d.h. $tr(\varphi_k |_{W_k}) = tr(\varphi_k |_{B_k})$. Aus (1) folgt:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_{k-1} |_{B_{k-1}}) + tr(\tilde{\phi}_k) + tr(\varphi_k |_{B_k})$$

Multiplikation mit $(-1)^k$ und Summation liefert die Hopfsche Spurenformel.

Beweis

- Sei $\{u_1, ..., u_l\}$ eine Basis von W_k. Dann gibt es $\alpha_1, .., \alpha_l \in \mathbb{Z}$, so dass $\{\alpha_1 u_1, .., \alpha_l u_l\}$ eine Basis von B_k ist. Also:

$$\varphi_k \mid_{W_k} (u_j) = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} u_i \tag{2}$$

$$\varphi_k \mid_{B_k} (\alpha_j u_j) = \sum_{i=1}^{l} b_{ij} \alpha_i u_i \tag{3}$$

- Multipliziert man (2) mit α_j, so erhält man (3). Also: $\alpha_i a_{ii} = b_{ii} \alpha_i$, d.h. $tr(\varphi_k \mid_{W_k}) = tr(\varphi_k \mid_{B_k})$. Aus (1) folgt:

$$tr(\varphi_k) = tr(\varphi_{k-1} \mid_{B_{k-1}}) + tr(\tilde{\phi}_k) + tr(\varphi_k \mid_{B_k})$$

Multiplikation mit $(-1)^k$ und Summation liefert die Hopfsche Spurenformel.

Grundlagen

Definition

Einem Elementarwürfel $Q \in \mathcal{K}_k^d$ im $\mathbb{R}^d$ der Dimension k ordnen wir wie folgt ein algebraisches Objekt $\widehat{Q}$ zu:

$$\widehat{Q} : \mathcal{K}_k^d \to \mathbb{Z}, \quad \widehat{Q}(P) := \begin{cases} 1 & P = Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung $\widehat{Q}$ heißt *elementare k-Kette im* $\mathbb{R}^d$. Wir setzen:

$$\widehat{\mathcal{K}}_k^d := \{\widehat{Q} : Q \in \mathcal{K}_k^d\}, \quad \widehat{\mathcal{K}}^d := \bigcup_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}_k^d$$

Grundlagen

Definition

Für $X \subset \mathbb{R}^d$ kubisch setzen wir

$$\widehat{\mathcal{K}}_k(X) := \{\widehat{Q} : Q \in \mathcal{K}_k(X)\}$$

Die von der Menge $\mathcal{K}_k(X)$ erzeugte freie abelsche Gruppe $C_k(X)$ heißt *Gruppe der kubischen k–Ketten von X*. Elemente von $C_k(X)$ sind Funktionen

$$c : \mathcal{K}_k(X) \to \mathbb{Z}$$

so dass für fast alle $Q \in \mathcal{K}_k(X)$ gilt: $c(Q) = 0$. Insbesondere ist $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ eine Basis von $C_k(X)$.

Grundlagen

Definition

Eine *mehrwertige* Abbildung $F : X \Rightarrow Y$ ist eine Abbildung, so dass für alle $x \in X$ gilt: $F(x) \subset Y$.

Eine mehrwertige Abbildung heißt *kubisch*, falls

- Für alle $x \in X$ gilt: $F(x)$ ist kubisch.
- Für alle $Q \in \mathcal{K}(X)$ gilt: $F\mid_{\overset{\circ}{Q}}$ ist konstant.

Grundlagen

Definition

Eine *mehrwertige* Abbildung $F : X \rightrightarrows Y$ ist eine Abbildung, so dass für alle $x \in X$ gilt: $F(x) \subset Y$.

Eine mehrwertige Abbildung heißt *kubisch*, falls

- Für alle $x \in X$ gilt: $F(x)$ ist kubisch.
- Für alle $Q \in \mathcal{K}(X)$ gilt: $F \mid_{\overset{\circ}{Q}}$ ist konstant.

Eine mehrwertige Abbidlung heißt *schwach halbstetig*, falls für jedes offene $U \subset Y$ die Menge

$$F^{*-1}(U) := \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

offen ist.

Grundlagen

Definition

Eine *mehrwertige* Abbildung $F : X \Rightarrow Y$ ist eine Abbildung, so dass für alle $x \in X$ gilt: $F(x) \subset Y$.
Eine mehrwertige Abbildung heißt *kubisch*, falls

- Für alle $x \in X$ gilt: $F(x)$ ist kubisch.
- Für alle $Q \in \mathcal{K}(X)$ gilt: $F|_{\overset{\circ}{Q}}$ ist konstant.

Eine mehrwertige Abbidlung heißt *schwach halbstetig*, falls für jedes offene $U \subset Y$ die Menge

$$F^{*-1}(U) := \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

offen ist.

Grundlagen

Definition

Eine kubische, mehrwertige Abbildung $F : X \Rightarrow Y$ heißt *azyklisch*, falls für jedes $x \in X$ die Menge $F(x)$ azyklisch ist.

Grundlagen

Theorem

Sei $F : X \Rightarrow Y$ eine schwach halbstetige, azyklische, kubische Abbildung. Dann gibt es eine Kettenabbildung $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, so dass gilt:

- $|\varphi(\widehat{Q})| \subset F(\overset{\circ}{Q})$ *für alle* $Q \in \mathcal{K}(X)$.
- $\varphi(\widehat{Q}) \in \widehat{\mathcal{K}}_0(F(Q))$ *für alle* $Q \in \mathcal{K}_0(X)$.

Diese Kettenabbildung heißt Kettenselektor.
Für $c \in C_k(X)$ bezeichne $|c| := \bigcup\{P \in \mathcal{K}_k(X) \mid c(P) \neq 0\}$ den Träger von c.

Grundlagen

Definition

Seien X, Y kubisch und $f : X \to Y$ stetig. Die Abbildung

$$M_f : X \rightrightarrows Y, \quad x \mapsto ch(f(ch(x)))$$

heißt *minimale Darstellung* von f. M_f ist schwach halbstetig und kubisch. Ist sie azyklisch, dann existiert ein Kettenselektor $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, wir definieren die Homologieabbildung f_* von f als: $f_* := (M_f)_* := \varphi_*$.

Grundlagen

Definition

Ein Vektor der Form $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$ heißt *Skalierungsvektor*. Eine *Skalierung* ist eine Abbildung

$$\Lambda^\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_d x_d)$$

Für eine kubische Menge X setzen wir: $\Lambda_X^\alpha := \Lambda^\alpha |_X$ und $X^\alpha := \Lambda_X^\alpha(X)$. Mit

$$\Omega_X^\alpha : X^\alpha \to X, \quad x \mapsto (\alpha_1^{-1} x_1, \ldots, \alpha_d^{-1} x_d)$$

gilt: $(\Omega_X^\alpha) = (\Lambda_X^\alpha)^{-1}$.

Grundlagen

Satz

Sei X eine kubische Menge und α ein Skalierungsvektor. Dann gilt:

- $M_{\Lambda^\alpha_X} : X \rightrightarrows X^\alpha$ *ist azyklisch.*
- $M_{\Omega^\alpha_X} : X^\alpha \rightrightarrows X$ *ist azyklisch.*
- $(\Omega^\alpha_X)_* = (\Lambda^\alpha_X)_*^{-1}$.

Grundlagen

Theorem

Seien X, Y kubisch und $f : X \to Y$ stetig. Dann existiert ein Skalierungsvektor α, so dass M_{f^α} azyklisch ist. Dabei ist $f^\alpha := f \circ \Omega_X^\alpha$.

Definition

Seien X, Y kubisch und $f : X \to Y$ stetig. Sei α ein Skalierungsvektor, so dass M_{f^α} azyklisch ist. Dann setzen wir:

$$f_* : H_*(X) \to H_*(Y), \quad f_* := (f^\alpha)_* \circ (\Lambda_X^\alpha)_*$$

Definition

Definition

Sei X kubisch und $f : X \to X$ stetig. Dann ist die *Lefschetz–Zahl* von f definiert als:

$$L(f) := \sum_k (-1)^k tr(f_{*k})$$

Theorem (Fixpunktsatz von Lefschetz)

Sei X kubisch und $f : X \to X$ stetig. Ist $L(f) \neq 0$, dann besitzt f einen Fixpunkt.

Beweis

Wir zeigen die Behauptung indirekt.
Angenommen f besitze keinen Fixpunkt. Setze

$$\varepsilon := \inf_{x \in X} \|x - f(x)\|$$

Da kubische Mengen kompakt sind und die Abbildung

$$x \mapsto \|x - f(x)\|$$

stetig ist, nimmt sie in einem Punkt $x_0 \in X$ ihr Minimum an. Also: $\varepsilon = \|x_0 - f(x_0)\|$. Sei $m > \frac{2}{\varepsilon}$ und $\alpha = (m, \ldots, m)$ ein Skalierungsvektor. Betrachte die Abbildung

$$g := \Lambda_X^\alpha \circ f \circ \Omega_X^\alpha : X^\alpha \to X^\alpha$$

Beweis

Behauptung 1: Für jedes $y \in X^\alpha$ gilt:

$$\|y - g(y)\| > 2$$

Beweis 1: Mit $x = \Omega_X^\alpha(y)$ folgt:

$$\begin{aligned}\|y - g(y)\| &= \|\Lambda_X^\alpha(\Omega_X^\alpha(y)) - \Lambda_X^\alpha(f(\Omega_X^\alpha(y)))\| \\ &= \|\Lambda_X^\alpha(x - f(x))\| \\ &= m\|x - f(x)\| > \frac{2}{\varepsilon}\varepsilon > 2\end{aligned}$$

Beweis

Behauptung 2: Für alle $Q \in \mathcal{K}(X^\alpha)$ gilt:

$$Q \cap ch(g(Q)) = \emptyset$$

Beweis 2: Angenommen $x \in Q \cap ch(g(Q))$. Damit erhalten wir: $\operatorname{dist}(x, g(Q)) \leq 1$. Also gibt es ein $y \in Q$ mit $\|x - g(y)\| \leq 1$ und:

$$\|y - g(y)\| \leq \|y - x\| + \|x - g(y)\| \leq 2$$

Widerspruch zu Behauptung 1.

Beweis

Sei β ein Skalierungsvektor, so dass die minimale Darstellung $M_{g^\beta} : X^{\alpha\beta} \Rightarrow X^\alpha$ von $g^\beta := g \circ \Omega^\beta_{X^\alpha} : X^{\alpha\beta} \to X^\alpha$ azyklisch ist. Sei

$$\psi : \mathcal{C}(X^{\alpha\beta}) \to \mathcal{C}(X^\alpha)$$

ein Kettenselektor bezüglich dieser Darstellung. Außerdem ist auch die minimale Darstellung $M_{\Lambda^\beta_{X^\alpha}} : X^\alpha \Rightarrow X^{\alpha\beta}$ azyklisch. Sei

$$\theta : \mathcal{C}(X^\alpha) \to \mathcal{C}(X^{\alpha\beta})$$

ein dazugehöriger Kettenselektor. Die Homologieabbildung $g_* : H_*(X^\alpha) \to H_*(X^\alpha)$ ist dann definiert als:

$$g_* := (g \circ \Omega^\beta_{X^\alpha})_* \circ (\Lambda^\beta_{X^\alpha})_* = \psi_* \circ \theta_*$$

Beweis

Behauptung 3: Für alle $Q \in \mathcal{K}_k(X^\alpha)$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$Q \cap |\psi_k \circ \theta_k(\widehat{Q})| = \emptyset$$

Beweis 3: Angenommen $x \in Q \cap |\psi_k \circ \theta_k(\widehat{Q})|$. Dann folgt aus den Eigenschaften eines Kettenselektors, dass

$$|\psi_k \circ \theta_k(\widehat{Q})| \subset \bigcup \{M_{g^\beta}(\mathring{P}) \mid P \in \mathcal{K}(|\theta_k(\widehat{Q})|)\}$$

Also gibt es ein $P \subset |\theta_k(\widehat{Q})|$, so dass $x \in M_{g^\beta}(\mathring{P})$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} |\theta_k(\widehat{Q})| \subset M_{\Lambda^\beta_{X^\alpha}}(\mathring{Q}) &= ch(\Lambda^\beta_{X^\alpha}(ch(\mathring{Q}))) \\ &= ch(\Lambda^\beta_{X^\alpha}(Q)) = \Lambda^\beta_{X^\alpha}(Q) \end{aligned}$$

Beweis

Also: $P \subset \Lambda^{\beta}_{X^{\alpha}}(Q)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x \in M_{g^{\beta}}(\overset{\circ}{P}) &= ch(g^{\beta}(ch(\overset{\circ}{P})) \\ &= ch(g \circ \Omega^{\beta}_{X^{\alpha}}(P)) \\ &\subset ch(g \circ \Omega^{\beta}_{X^{\alpha}} \circ \Lambda^{\beta}_{X^{\alpha}}(Q)) \\ &= ch(g(Q)) \end{aligned}$$

Widerspruch zu Behauptung 2.

Beweis

Die Behauptung 3 impliziert, dass die Diagonaleinträge der darstellenden Matrix von $\psi_k \circ \theta_k$ bezüglich der Basis $\widehat{\mathcal{K}}_k(X^\alpha)$ alle Null sind, d.h. $tr(\psi_k \circ \theta_k) = 0$. Aus der Hopfschen Spurenformel folgt: $tr(g_{*k}) = 0$ und da $(\Omega_X^\alpha)_* = (\Lambda_X^\alpha)_*^{-1}$, folgt: $tr(f_{*k}) = 0$, also: $L(f) = 0$. $\square$

Satz

Satz

Sei X eine azyklische kubische Menge und $f : X \to X$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt.

Beweis

Nach Voraussetzung ist X azyklisch, also gilt für ihre Homologiegruppen:

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

X ist zusammenhängend und für zusammenhängende kubische Mengen gilt: Die Homologieabbildung $f_{*0} : H_0(X) \to H_0(X)$ ist die identische Abbildung. Also gilt: $L(f) \neq 0$. Mit dem Fixpunktsatz von Lefschetz folgt die Behauptung. □

Satz

Korollar

Sei $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ ein Fluss auf einer azyklischen, kubischen Menge X. Dann besitzt φ eine Ruhelage.

Beweis

Für jedes $\tau > 0$ ist φ_τ stetig und nach obigem Satz besitzt die Zeit–τ–Abbildung einen Fixpunkt. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Zeitfolge, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Für jedes t_n gibt es ein x_n, so dass $\varphi(x_n, t_n) = x_n$. Weil X kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $y = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}$. Sei s_m die minimale Periode von x_{n_m}. Wir zeigen nun, dass y eine Ruhelage ist, d.h.

$$\varphi(t, y) = y \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Beweis

Angenommen y sei keine Ruhelage, dann gibt es ein $\tau > 0$, so dass $\varphi(\tau, y) = z \neq y$. Wir finden also ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|z - y\| > \varepsilon \tag{4}$$

Aus der Stetigkeit des Flusses folgt: $\lim_{m\to\infty} \varphi(\tau, x_{n_m}) = z$. Betrachte die Menge $\varphi([0, s_m), x_{n_m})$. Da s_m die minimale Periode von x_{n_m} ist, folgt: $\varphi(\mathbb{R}, x_{n_m}) = \varphi([0, s_m), x_{n_m})$. Schließlich erhält man aufgrund der Stetigkeit von φ:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(\varphi(\mathbb{R}, x_{n_m}) = 0$$

Widerspruch zu (4). □

Ende

Vielen Dank.