Kubische Homologie - Teil II

Jochen Merker

28. August 2007

Rückblick

Wir betrachten k-dimensionale elementare Würfel $\mathcal{K}_k(X)$ und deren Ketten $\mathcal{C}_k(X)$ in einer kubischen Menge $X \subset \mathbb{R}^d$, sowie die kubische Homologie $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$ von X, wobei $Z_k(X) := \operatorname{Kern} \partial_k$ die Zykel und $B_k(X) := \operatorname{Bild} \partial_{k+1}$ die Ränder bezeichnet, die zum Randoperator $\partial_k : \mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_{k-1}(X)$ gehören.

Beispiel

Mittels Homologietheorie kann man topologische Eigenschaften von Räumen diskutieren. Wir wollen dies am Beispiel der Gruppe $H_0(X)$ erläutern, die die Zusammenhangskomponenten von X zählt.

Zusammenhang vs. Ecken-Zusammenhang

Zunächst bemerke man, dass für kubische Mengen Zusammenhang(skomponenten) und Ecken-Zusammenhang(skomponenten) identisch sind.

Theorem

Für eine kubische Menge X ist $H_0(X)$ eine freie abelsche Gruppe, und wählt man in jeder Zusammenhangskomponente eine Ecke P_i, dann ist $\hat{P}_i$ eine Basis von $H_0(X)$.

Ziel

Nachdem wir nun glauben können, daß die Berechnung von Homologiegruppen nützliche Informationen über den zugrundeliegenden Raum liefert, brauchen wir Methoden, um Homologiegruppen leicht ausrechnen zu können.
Eine solche Methode ist der Kollaps eines elementaren Würfels durch eine freie Seitenfläche.

Freie Seitenflächen und maximale Würfel

Definition

- Ist X kubisch, dann nennt man einen elementaren Würfel Q in X, der für nur einen einzigen elementaren Würfel eine echte Seitenfläche ist, eine freie Seitenfläche in X.

Freie Seitenflächen und maximale Würfel

Definition

- Ist X kubisch, dann nennt man einen elementaren Würfel Q in X, der für nur einen einzigen elementaren Würfel eine echte Seitenfläche ist, eine freie Seitenfläche in X.
- Ist X kubisch, dann nennt man einen elementaren Würfel $P \in \mathcal{K}(X)$, der keine echte Seitenfläche eines elementaren Würfels in X ist, maximal.

Freie Seitenflächen und maximale Würfel

Definition

- Ist X kubisch, dann nennt man einen elementaren Würfel Q in X, der für nur einen einzigen elementaren Würfel eine echte Seitenfläche ist, eine freie Seitenfläche in X.
- Ist X kubisch, dann nennt man einen elementaren Würfel $P \in \mathcal{K}(X)$, der keine echte Seitenfläche eines elementaren Würfels in X ist, maximal.

Lemma

Ist Q eine freie Seitenfläche des elementaren Würfels P in X, dann ist P maximal und $\dim(Q) = \dim(P) - 1$.

Elementarer Kollaps

Definition

Ist Q eine freie Seitenfläche in X und P der eindeutige elementare Würfel, dessen Seitenfläche Q ist, dann heißt $X' := \bigcup_{R \in \mathcal{K}(X), R \neq Q, P} R$ die kubische Menge, die durch einen elementaren Kollaps von P durch Q in X entsteht.

Elementarer Kollaps

Definition

Ist Q eine freie Seitenfläche in X und P der eindeutige elementare Würfel, dessen Seitenfläche Q ist, dann heißt $X' := \bigcup_{R \in \mathcal{K}(X), R \neq Q, P} R$ die kubische Menge, die durch einen elementaren Kollaps von P durch Q in X entsteht.

Lemma

$\mathcal{K}(X') = \mathcal{K}(X) \setminus \{Q, P\}$

Homologie unter Kollaps

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, daß sich die Homologie bei einem elementaren Kollaps nicht ändert. Dies vereinfacht die Berechnung der Homologie von komplizierten kubischen Mengen: Man muß nur genügend viele elementare Würfel durch freie Seitenflächen kollabieren lassen und kann dann die Homologie der so entstandenen kleineren kubischen Menge ausrechnen.

Lemma

Ensteht X' aus X durch den elementaren Kollaps eines k-dimensionalen P_0 durch Q_0, dann gilt

- $\{c \in C_k(X) \,|\, \partial c \in C_{k-1}(X')\} \subset C_k(X')$, *und*
- *für jede Kette $c \in C_{k-1}(X)$ gibt es ein $c' \in C_{k-1}(X')$ mit $c - c' \in B_{k-1}(X)$.*

Lemma

Ensteht X' aus X durch den elementaren Kollaps eines k-dimensionalen P_0 durch Q_0, dann gilt

- $\{c \in C_k(X) \,|\, \partial c \in C_{k-1}(X')\} \subset C_k(X')$, *und*
- *für jede Kette $c \in C_{k-1}(X)$ gibt es ein $c' \in C_{k-1}(X')$ mit $c - c' \in B_{k-1}(X)$.*

Theorem

Ensteht X' aus X durch einen elementaren Kollaps (oder auch endlich viele), dann gilt $H_*(X') \cong H_*(X)$.

Beweisidee

- die Gruppen $H_n(X)$ und $H_n(X')$ sind trivialerweise gleich für $n \neq k-2, k-1, k$.
- sie sind auch gleich für $n = k$ und $n = k-2$.
- für $n = k-1$ hat man nur einen Isomorphismus $H_{k-1}(X') \cong H_{k-1}(X)$, dieser ist durch die Inklusion $[z]_{X'} \mapsto [z]_X$ gegeben.

Retraktion

Ein elementarer Kollaps wird topologisch durch eine Retraktion induziert. Ohne darauf genauer einzugehen, wie dies geschieht, wollen wir hier wenigstens den Begriff der Retraktion kennenlernen.

Definition

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt Deformationsretrakt von X, wenn es eine stetige Abbildung $h : X \times [0,1] \to X$ gibt mit

- $h(x,0) = x$ für alle $x \in X$,
- $h(x,1) \in A$ für alle $x \in X$ und
- $h(a,1) = a$ für alle $a \in A$.

Solch eine Abbildung h nennt man auch eine Homotopie von Id_X und Id_A. Diese nennt man stark, wenn $h(a,t) = a$ für alle $t \in [0,1]$ und $a \in A$ gilt (und nur solche tauchen für kubische Mengen auf).

Azyklische kubische Mengen

Definition

Eine kubische Menge X heißt azyklisch, wenn ihre Homologie die eines Punktes ist:
$H_k(X) = 0$ für alle $k \neq 0$, und $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Theorem

Jeder elementare Würfel ist azyklisch.

Bemerkung

Wir kommen nun zu zwei Sätzen, die Spezialfälle des viel allgemeineren Satzes von Meyer-Vietoris sind.

Theorem

Sind X, Y azyklische kubische Mengen und ist auch $X \cap Y$ azyklisch, dann ist $X \cup Y$ azyklisch.

Bemerkung

Wir kommen nun zu zwei Sätzen, die Spezialfälle des viel allgemeineren Satzes von Meyer-Vietoris sind.

Theorem

Sind X, Y azyklische kubische Mengen und ist auch $X \cap Y$ azyklisch, dann ist $X \cup Y$ azyklisch.

Theorem

Jede sternförmige kubische Menge ist azyklisch.

Abstrakte Homomologietheorie

Definition

Eine (beidseitige) Folge von abelschen Gruppen C_k und Gruppen-Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ (genannt Randoperatoren) heißt Kettenkomplex, wenn $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ gilt. Dann kann man mittels $Z_k := \operatorname{Kern} \partial_k$ (Zykel) und $B_k = \operatorname{Bild} \partial_{k+1}$ (Ränder) Homologiegruppen $H_k := Z_k / B_k$ definieren.

Abstrakte Homomologietheorie

Definition

Eine (beidseitige) Folge von abelschen Gruppen C_k und Gruppen-Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ (genannt Randoperatoren) heißt Kettenkomplex, wenn $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ gilt. Dann kann man mittels $Z_k := \operatorname{Kern} \partial_k$ (Zykel) und $B_k = \operatorname{Bild} \partial_{k+1}$ (Ränder) Homologiegruppen $H_k := Z_k / B_k$ definieren.

Definition

Ein Kettenkomplex heißt endlich erzeugt und frei, wenn jedes C_k eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe ist, und $C_k = 0$ für alle bis auf endlich viele k gilt.

Augmentierte Homomologie

Ziel

Als Beispiel für abstrakte Homologietheorie wollen wir aus unserer kubischen Homologie eine Homologietheorie gewinnen, bei der Punkte triviale Homologie haben.

Definition

Der augmentierte kubische Kettenkomplex ist durch $\tilde{C}_k(X) := C_k(X)$ für $k \geq 0$, $\tilde{C}_{-1}(X) := \mathbb{Z}$ und $\tilde{C}_k := \{0\}$ für $k < -1$ gegeben, wobei ∂_0 der Gruppenhomomorphismus ist, der jeden Punkt $[x_1] \times \cdots \times [x_d]$ auf $1 \in \mathbb{Z}$ abbildet, und ∂_k für $k > 0$ der Randoperator auf Würfeln (und Ketten) ist.

Theorem

Die zugehörige reduzierte Homologie $\tilde{H}(X)$ erfüllt $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ und $H_k(X) = \tilde{H}_k(X)$ für $k > 0$.

Theorem

Die zugehörige reduzierte Homologie $\tilde{H}(X)$ *erfüllt* $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ *und* $H_k(X) = \tilde{H}_k(X)$ *für* $k > 0$.

Ausblick

In den folgenden Referaten wird die Homologie-Theorie benutzt werden, um Aussagen über anwendungsrelevante Räume und Abbildungen zu gewinnen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !