Das Wazewski Prinzip

Annika Schall

Sommersemester 2007

Das Wazewski Prinzip

1. Vorbereitung und Wiederholung

Notation

Im Folgenden sei X ein topologischer Raum, $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß. Mit I sei das Einheitsintervall beschrieben. Es sei $W \subset X$ eine Teilmenge, dann ist

$$W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$$

die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und

$$W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$$

die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen. Es gilt offensichtlich
$W^- \subset W^0 \subset W$.

Definition 1.1

Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *Deformationsretrakt* von X, falls es eine Abbildung

$$r : X \times I \longrightarrow W$$

gibt, mit

$$r(x, 0) = x, \forall x \in X r(x, 1) \in W, \forall x \in X r(w, 1) = w, \forall w \in W.$$

Dann ist $W \simeq X$.
Falls $r(w, t) = w, \forall t \in I$, so heißt W *starker Deformationsretrakt* von X.

Definition 1.2

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *von oben halbstetig*, falls die Menge $\{x \in X | f(x) < \alpha\}$ offen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Sie heißt *von unten halbstetig*, falls die Menge $\{x \in X | f(x) > \alpha\}$ offen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.3

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig*, falls sie sowohl von oben als auch von unten halbstetig ist.

2. Das Wazewski Prinzip

Definition 2.1

Eine Menge $W \subset X$ heißt *Wazewski Menge*, falls gilt

$$
\begin{aligned}
&1)\ x \in W, \varphi([0,t),x) \subset \overline{W} \Rightarrow \varphi([0,t),x) \subset W \\
&2)\ W^- \text{ ist abgeschlossen in } W^0.
\end{aligned}
$$

Satz 2.2

Es sei W eine Wazewski Menge. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\text{i) } W^- \text{ ist starker Deformationsretrakt von } W^0 \text{ und} \\
&\text{ii) } W^0 \text{ ist offen in } W.
\end{aligned}
$$

Beweis

Für $W^0 = \emptyset$ ist die Aussage trivial. Sei also nun $W^0 \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Wir wollen nun also eine starke Deformationsretraktion $h : W^0 \times I \longrightarrow W^-$ von W^0 nach W^- konstruieren. Zunächst definieren wir dazu eine Abbildung

$$
\begin{aligned}
&\tau : W^0 \longrightarrow [0,\infty) \text{ durch} \\
&\tau(x) = \sup\{t \geq 0 | \varphi([0,t],x) \subset W\}.
\end{aligned}
$$

Aus der Definition von W^0 folgt, daß $\tau(x)$ endlich ist. Aus der Stetigkeit des Flusses folgt, daß $\varphi([0,t],x) \subset \overline{W}$, und da W Wazewski Menge ist, ist $\varphi(\tau(x),x) \in W^-$ und es gilt

$$\tau(x) = 0 \Leftrightarrow x \in W^-.$$

Nehmen wir nun an, τ sei stetig und definieren h durch

$$h(x,\sigma) = \varphi(\sigma\tau(x),x).$$

Offensichtlich gilt

$$h(x,0) = \varphi(0,x) = x, h(x,1) = \varphi(\tau(x),x) \in W^-$$

und mit $y \in W^-$

$$h(y,\sigma) = \varphi(\sigma\tau(y),y) = \varphi(0,y) = y.$$

Also ist h unter der Annahme, daß τ stetig ist, starke Deformationsretraktion von W^0 auf W^-. Es bleibt also zu zeigen, daß τ stetig ist. Wir zeigen zunächst, daß τ von oben halbstetig ist, und danach die Halbstetigkeit von unten. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in W^0$, sodaß $\tau(x) < \alpha$. Zu zeigen ist, daß es eine offene Umgebung $\mathcal{U}_x \subset W^0$ gibt, sodaß $\tau(x') < \alpha$, für alle $x' \in \mathcal{U}_x$. Es gilt $\varphi([\tau(x),\alpha],x) \not\subset W$, denn

$$\varphi([\tau(x),\alpha],x) = \varphi([\sup\{t \geq 0 | \varphi([0,t],x) \subset W\},\alpha],x).$$

Die Definition einer Wazewski Menge liefert, daß es ein $t_0 \in [\tau(x),\alpha]$ gibt, sodaß $\varphi(t_0,x) \notin \overline{W}$. Wir wählen nun also eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(\varphi(t_0,x))$, $V \subset X$, sodaß $V \cap \overline{W} = \emptyset$. Aufgrund der Stetigkeit von φ, gibt es eine offene Umgebung $X \supset U \in \mathfrak{U}(x)$, sodaß $\varphi(t_0,U) \subset V$. Sei nun $\mathcal{U}_x = U \cap W$, und für alle $y \in \mathcal{U}_x$ sei $\varphi(t_0,y) \notin W$. Wir erhalten also $\mathcal{U}_x \subset W^0$ und $\tau(y) < t_0 \leq \alpha$, also ist τ von oben halbstetig.

Nun wollen wir zeigen, daß τ auch von unten halbstetig ist, also daß die Menge $A := \{x \in W^0 | \tau(x) \leq \alpha\}$ abgeschlossen in W^0 ist. Sei (x_n) eine Folge von Punkten in A, die gegen einen Punkt $x \in W^0$ konvergiert. Setze $t_n := \tau(x_n)$. Dann ist $t_n \in [0, \alpha]$. Da das Intervall $[0, \alpha]$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge t_{n_k}, die gegen ein $t_0 \leq \alpha$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von φ gilt $\varphi(t_{n_k}, x_{n_k}) \longrightarrow \varphi(t_0, x)$. Um zu zeigen, daß $\varphi(t_0, x) \in W^0$ ist, nehmen wir an, das gelte nicht. Wir behaupten also, $\varphi(t, x) \in W$ für alle $t \geq t_0$. (Bemerkung: Wir zeigen sogar, daß das für alle $t \in [0, t_0]$ gilt.) Wähle ein t beliebig. Wegen $t_{n_k} \longrightarrow t_0$ gibt es eine Teilfolge $(s_{n_k}) \subset [0, t_{n_k}]$, die gegen t konvergiert. Aufgrund der Wahl von t_{n_k} gilt $\varphi(t_{n_k}, x_{n_k}) \in W$. Die Definition einer Wazewski Menge liefert uns, daß $\varphi(t, x) \in W$. Hieraus, zusammen mit der obigen Beobachtung, folgt, daß $\varphi(t, x) \in W$ für alle $t \geq 0$, im Widerspruch zur Annahme, daß $x \in W^0$. Also folgt $\varphi(t_0, x) \in W^0$. Desweiteren gilt $\varphi(t_{n_k}, x_{n_k}) \in W^-$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Abgeschlossenheit von W^- in W^0 folgt, daß $\varphi(t_0, x) \in W^-$. Schließlich ergibt sich $\tau(x) \leq t_0 \leq \alpha$, also $x \in A$, also ist A abgeschlossen in W^0. Damit ist also gezeigt, daß τ stetig ist. Wir wollen nun nur noch zeigen, daß W^0 offen in W ist. Diese Tatsache ergibt sich aber sofort, indem man die Argumente zu Halbstetigkeit von oben von τ auf beliebige $x \in W^0$ und $\alpha > \tau(x)$ anwendet. Dadurch erhält man nämlich mit $\mathcal{U}_x \subset W^0$, daß W^0 offen in W ist. $\square$

Korollar 2.3 (*Wazewski Prinzip*)

Es sei W eine Wazewski Menge und W^- kein starker Deformationsretrakt von W. Dann ist $W \setminus W^0 \neq \emptyset$, es existieren also Lösungen, die für alle $t \geq 0$ in W bleiben.

Beweis

Wir nehmen an, alle Lösungen verließen irgendwann W, dann gälte also $W^0 = W$, im Widerspruch zu Satz 2.2. $\square$

Korollar 2.4

Es sei W eine kompakte Wazewski Menge und W^- kein starker Deformationsretrakt von W. Dann gilt $Inv(W, \varphi) = \{x \in W | \varphi(\mathbb{R}, x) \subset W\} \neq \emptyset$.

Beweis

Korollar 2.3 besagt, daß es einen Punkt $x \in W$ gibt, sodaß $\varphi([0, \infty), x) \subset W$. Es gilt außerdem $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\varphi([t, \infty), x)}$ ist eine nichtleere, kompakte, invariante Teilmenge von W. $\square$

Proposition 2.5

Es sei W eine Wazewski Menge und es seien W und W^- kubische Mengen. Wenn gilt $H_*(W, W^-) \neq \emptyset$, dann ist $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.

Beweis

Falls $H_*(W, W^-) \neq \emptyset$, dann ist W^- kein Deformationsretrakt von W, denn eine Proposition aus Kapitel 9 besagt, falls W und W^- kubische Mengen wären und W^- ein Deformationsretrakt von W, so wäre $H_*(W, W^-) = 0$. Die endgültige Schlußfolgerung liefert uns jetzt das Korollar 2.4, da W kubisch und somit kompakt ist. $\square$