Das Wazewski Prinzip

Annika Schall

August 2007

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Notation

Im Folgenden sei

- X ein topologischer Raum,
- $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ ein Fluß,
- $I := [0, 1]$,
- $W \subset X$ eine Teilmenge, und
- $W^0 := \{x \in W | \exists t > 0 : \varphi(t, x) \notin W\}$ die *Menge aller Austrittspunkte* von W unter φ, und
- $W^- := \{x \in W | \varphi([0, t), x) \not\subset W, \forall t > 0\}$ die Menge aller Punkte, die W unter φ sofort verlassen.
- Es gilt offensichtlich $W^- \subset W^0 \subset W$

Definition 1.1

Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *Deformationsretrakt* von X, falls es eine Abbildung

$$r : X \times I \longrightarrow W$$

gibt, mit

$$r(x,0) = x, \forall x \in X r(x,1) \in W, \forall x \in X r(w,1) = w, \forall w \in W.$$

Dann ist $W \simeq X$.
Falls $r(w,t) = w, \forall t \in I$, so heißt W *starker Deformationsretrakt* von X.

Definition 1.2

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *von oben halbstetig*, falls die Menge $\{x \in X | f(x) < \alpha\}$ offen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Sie heißt *von unten halbstetig*, falls die Menge $\{x \in X | f(x) > \alpha\}$ offen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.3

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig*, falls sie sowohl von oben als auch von unten halbstetig ist.

Definition 2.1

Eine Menge $W \subset X$ heißt *Wazewski Menge*, falls gilt

1) $x \in W, \varphi([0,t),x) \subset \overline{W} \Rightarrow \varphi([0,t),x) \subset W$
2) W^- ist abgeschlossen in W^0.

Satz 2.2

Es sei W eine Wazewski Menge. Dann gilt:

i) W^- ist starker Deformationsretrakt von W^0 und

ii) W^0 ist offen in W.

Korollar 2.3 (*Wazewski Prinzip*)

Es sei W eine Wazewski Menge und W^- kein starker Deformationsretrakt von W. Dann ist $W \setminus W^0 \neq \emptyset$, es existieren also Lösungen, die für alle $t \geq 0$ in W bleiben.

Korollar 2.4

Es sei W eine kompakte Wazewski Menge und W^- kein starker Deformationsretrakt von W. Dann gilt $Inv(W, \varphi) = \{x \in W | \varphi(\mathbb{R}, x) \subset W\} \neq \emptyset$.

Proposition 2.5

Es sei W eine Wazewski Menge und es seien W und W^- kubische Mengen. Wenn gilt $H_*(W, W^-) \neq \emptyset$, dann ist $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.