Geodätische Flüsse

Prof. Roland Gunesch

Universität Hamburg

Vorlesung im Sommersemester 2008

Letzte Änderung an diesem Skript $\geq$ 26.5.2008

CONTENTS

1. Literatur

- Gabriel P. Paternain: Geodesic Flows. Birkhäuser
- Werner Ballmann: Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature (with an appendix by Misha Brin: Ergodicity of Geodesic Flows.) Birkhäuser
- Boris Hasselblatt & Anatole Katok.: A First Course in Dynamics. With a panora ma of recent developments. Cambridge University Press
- Ralph H. Abraham & Jerrold E. Marsden: Foundations of Mechanics (as reference only). Benjamin-Cummings
- Anatole Katok & Boris Hasselblatt: Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge University Press

Weitere Literatur wird an den entsprechenden Stellen noch bekannt gegeben, z.B.:

- Klaus Jänich: Vektoranalysis. Springer
- Barrett O'Neill: Semi-Riemannian geometry
- Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov: Metric geometry. American Mathematical Society GSM 33

2. Einleitung: Was ist ein geodätischer Fluss?

Für den Begriff „Geodätische" werden wir im Folgenden zwei Bedeutungen kennenlernen, die im Sinn der metrischen Geometrie und die im Sinn der Differentialgeometrie. Auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten bedeuten beide im Wesentlichen das Gleiche, nämlich eine lokal kürzeste Verbindung. Der geodätische *Fluss* besteht im Vorwärtsgehen längs Geodätischen.

3. Innere metrische Räume

Definition 3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine **Kurve** in X ist eine *stetige* Abbildung $[a, b] \to X$ mit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Die **Länge** einer Kurve $c : [a, b] \to X$ ist gegeben durch

$$L(c) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \mid k \in \mathbb{N},\ a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = b \right\}.$$

Remark 3.2. Die Länge einer Kurve ändert sich nicht unter (monotoner) Reparameterisierung. D.h.: Ist $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ ein Homöomorphismus, dann ist $L(c \circ \varphi) = L(c)$. (Ein **Homöomorphismus** ist eine Abbildung, die bijektiv und stetig ist und deren Inverse auch stetig ist.) Dabei muss φ nicht orientierungserhaltend sein, sondern es kann auch gelten $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$. Allgemeiner kann φ auch Homöomorphismus zwischen verschiedenen Intervallen sein, und es gilt immer noch $L(c \circ \varphi) = L(c)$.

Da wir die Parameterisierung somit frei wählen können, wählen wir sie mit Geschwindigkeit 1 wie folgt:

Definition 3.3. Sei $c : [a,b] \to X$ eine Kurve in X. Die **Bogenlänge** ist die Funktion $s : [a,b] \to [0, L(c)]$, gegeben durch

$$s(t) = L(c|_{[a,t]}),$$

so dass die Kurve $\hat{c} : [0, L(c)] \to X$ mit $\hat{c} \circ s = c$ für alle $a \le t \le t' \le b$ die Eigenschaft

$$L(\hat{c}|_{[t,t']}) = t' - t$$

erfüllt. Die Kurve $\hat{c}$ heißt dann **mit Einheitsgeschindigkeit parameterisiert**.

Allgemeiner heißt für $v > 0$ eine Kurve c **mit Geschwindigkeit** v **parameterisiert**, wenn für alle $a \le t \le t' \le b$ die Eigenschaft

$$L(\hat{c}|_{[t,t']}) = v \cdot (t' - t)$$

erfüllt ist.

Damit kann auf X eine neue Metrik definiert werden, die **innere Metrik**

$$d_i(x,y) := \inf \{L(c) \mid c : [0,1] \to X,\ c(0) = x,\ c(1) = y\}.$$

Es gilt immer $d_i \ge d$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d_i(x,y) \ge d(x,y)$. Falls $d = d_i$, heißt (X,d) ein **innerer metrischer Raum**.

In einem inneren metrischen Raum muss es zu gegebenem $x, y \in X$ keine längenminimierende Kurve von x nach y geben. Für solche Kurven haben wir einen besonderen Namen:

Definition 3.4. Eine Kurve $c : [a,b] \to X$ mit $L(c) = d(c(a), c(b))$ heißt **minimierende Geodätische**. Eine solche ist also kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte (und somit aller ihrer Punkte). Eine Kurve $c : [a,b] \to X$, die diese Bedingung lokal erfüllt, d.h. um jedem Punkt $t_0 \in [a,b]$ gibt es ein Intervall $I = [t,t']$, $t < t_0 < t'$ mit $L(c|_{[t,t']}) = d(c(t), c(t'))$ heißt **Geodätische**. Eine solche ist also immer noch kürzeste Verbindung, aber nur lokal.

4. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden brauchen wir den Begriff der **differenzierbaren Mannigfaltigkeiten**. Typische Beispiele sind der bekannte euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ und der n-dimensionale Torus $\mathbb{T}^n$ sowie die n-Sphäre S^n. Dies sind Spezialfälle der folgenden allgemeinen Definition. Zuerst benötigen wir allerdings noch ein paar weitere Definitionen aus der Topologie:

Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X mit einer Menge T von Teilmengen von X, gennant eine **Topologie** auf X, für die gilt:

- $\emptyset \in T, \;\; X \in T.$
- Die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus T liegt wieder in T.
- Der Durchschnitt von zwei Mengen aus T liegt wieder in T.

Ein topologischer Raum (X, T) heißt **Hausdorff-Raum** (bzw. hat die Hausdorff-Eigenschaft), wenn gilt: Für alle $x, y \in X$ gibt es $U, V \in T$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Wir sagen, ein topologischer Raum erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn gilt: Es gibt eine abzählbare Teilmenge von T, so dass die Vereinigung von Mengen daraus alle Mengen von T ergeben.

Jetzt können wir uns endlich den erwünschten Mannigfaltigkeiten zuwenden:

Eine **n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit** ist ein Tupel $(M, (U_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$, wobei M eine Menge ist (die Menge der Punkte auf der Mannigfaltigkeit), I eine Indexmenge, jedes U_i eine Teilmenge von M und h_i ein Homöomorphismus von U_i auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so dass gilt:

- M ist ein topologischer Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
  - $M = \bigcup_i U_i$.
  - Für alle $i, j \in I$ ist
    $$\psi_{ij} := h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \to h_j(U_i \cap U_j)$$
    ein C^k-Diffeomorphismus.

Die h_i heißen **Karten**, die U_i **Kartenumgebungen** und die ψ_{ij} **Kartenwechsel**.

Die Mannigfaltigkeit heißt **glatt**, wenn sie C^∞ ist. Eine C^0-Mannigfaltigkeit heißt **topologische Mannigfaltigkeit**.

$\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Karte $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = x$.

$\mathbb{T}^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit 2^n Karten, die alle Translationen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind.

$\mathbb{S}^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit 2 Karten, den sogenannten **stereographischen Projektionen** vom $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^n$.

Für jede glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x))\}$$

eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit (und Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Für jede beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Graph(f) eine glatte Mannigfaltigkeit, und es genügt eine einzige Karte $h : \text{Graph}(f) \to \mathbb{R}^n$, $h((x, f(x))) := x$. Genausogut kann Graph(f) auch mit allen Kartenumgebungen überdeckt werden, die Bilder unter f von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind; die zugehörigen Kartenwechsel sind die Identität und somit beliebig glatt.

Letzteres Beispiel ist recht exotisch; die Mannigfaltigkeiten, die wir im Folgenden benutzen, "sehen auch glatt aus". Allgemein reicht es aus, sich "glatte" Untermengen des $\mathbb{R}^n$ vorzustellen, denn es kann gezeigt werden, dass alle Mannigfaltigkeiten der Dimension n in einen $\mathbb{R}^m$ eingebettet werden können (Whitneys Einbettungssatz). Dabei ist gewöhnlich $m > n$ (es gibt aber immer eine Einbettung mit $m \leq 2n + 1$).

Weiterhin benötigen wir Abbildungen von/auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten:

Eine Abbildung $f : M \to N$ mit $(M, U_i, h_i), (N, V_j, \tilde{h}_j)$ Mannigfaltigkeiten heißt C^k, wenn für jede Kartenumgebung U_i von x in M und jede Kartenumgebung V_j von $f(x)$ in N gilt, dass $f|_{U_i}$ "bezüglich Karten C^k ist", d.h. wenn $\tilde{h}_j \circ f \circ h_i^{-1}$ eine C^k-Abbildung ist.

Allgemeiner gilt folgende "Meta-Definition":

Ein Objekt auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Diffeomorphismus / ein Homöomorphismus / eine glatte Abbildung / eine C^k-Kurve / etc. genau dann, wenn dies bezüglich Karten gilt.

D.h. $f : M \to N$ ist ein Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Karten $h, \tilde{h}$ auf M, N gilt: $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus (als Abbildung einer Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$). Das klingt erst einmal etwas verwunderlich, da für die Karten h ja gar nicht vorausgesetzt ist, dass diese C^k sind; und es ist auch gar nicht möglich, das vorauszusetzen, denn auf der Punktemenge M kann man ja erst einmal nicht ableiten. Dennoch macht diese Definition Sinn: denn ob $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, hängt nicht von $h, \tilde{h}$ ab, und daher können wir testen, ob es für ein (dann alle) $h, \tilde{h}$ gilt.

Der **Tangentialraum** T_xM an die Mannigfaltigkeit M am Punkt x ist die Menge von stetig differenzierbaren Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ modulo der Äquivalenzrelation $c_1 \sim c_2$ für $(h \circ c_1)'(0) = (h \circ c_2)'(0)$. Hierbei ist h Karte auf einer x enthaltenden Kartenumgebung.

Dabei muss genaugenommen c in einer Kartenumgebung liegen; dies kann aber auch nachträglich durch Einschränkung des Definitionsbereichs von c sichergestellt werden.

Für eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Graph von f, d.h. $\{(x, f(x))\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit M und der Tangentialraum davon am Punkt x ist eine Gerade mit Steigung $f'(x)$.

5. Fortsetzbarkeit von Geodätischen in metrischen Räumen

Lemma 5.1. ***(Halbstetigkeit der Länge in inneren metrischen Räumen)*** *Sei $(c_n : [0,1] \to X)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Kurven, die punktweise gegen $c : [0,1] \to X$ konvergiere. Dann gilt*

$$L(c) \leq \liminf_{n \to \infty} L(c_n).$$

Proof. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Finde $k \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$, so dass gilt

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \geq L(c) - \varepsilon.$$

Da es endlich viele t_i sind, können wir $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $i = 0, \ldots, k$ gilt: $d(c(t_i), c_n(t_i)) < \varepsilon / k$.

Damit gilt für alle $n \geq n_0$ und alle $i = 0, \ldots, k$, dass

$$d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) + 2\varepsilon / k.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} L(c) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L(c) \leq \liminf_{n\to\infty} L(c_n) + 3\varepsilon,$$

und daraus wegen Beliebigkeit von ε die Behauptung. □

Remark 5.2. Es kann strikte Ungleichung vorkommen, sogar wenn die Konvergenz gleichmäßig ist, sogar wenn sie exponentiell ist (oder beliebig schnell). Z.B. hat für jede Folge $\varphi_n \to \infty$ die Kurvenfolge

$$(c_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}, \quad c_n(t) = \frac{\sin(\varphi_n^2 t)}{\varphi_n}$$

die Eigenschaft $L(c_n) \to \infty$, aber $(c_n)_{n\in N}$ konvergiert gleichmäßig (und mit $1/\varphi_n$ majorisiert) gegen die Punktkurve $c : [0,1] \to 0$ der Länge 0.

Bei C^1-Kurven ist die Länge stetig, d.h. es gilt in der Tat

$$L(\lim_{n\to\infty} c_n) = \lim_{n\to\infty} L(c_n).$$

Nun wenden wir uns der Frage zu, ob es zu zwei Punkten eine kürzeste Verbindung gibt, und der (damit zusammenhängenden) Frage, ob sich Geodätische mit Definitionsbereich [0,1) fortsetzen lassen auf [0,1]. Das ist nicht immer der Fall:

Example 5.3. Bei

(1) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0)\}$
(2) $X = R^2 \setminus B_1((0))$ (jeweils mit der euklidischen Metrik)

gibt es sowohl Punkte, die sich nicht mit Kürzesten verbinden lassen ((x_1, x_2) und $(-x_1, -x_2)$) als auch Geodätische $c : [0,1) \to X$, die sich nicht auf [0,1] fortsetzen lassen.

Für

(3) $X = B_1((0,0)) \subset \mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik)

gibt es ebenfalls eine Geodätische $c : [0,1) \to X$, die sich nicht auf [0,1] fortsetzen läßt. Hier lassen sich jedoch alle Punkte $x, y \in X$ mit einer minimierenden Geodätischen verbinden.

Klar ist, dass Vollständigkeit wichtig ist; im Folgenden benutzen wir auch lokale Kompaktheit (d.h. jeder Punkt enthält eine Umgebung, deren Abschluss in X kompakt ist).

Das letzte Beispiel läßt uns vermuten, dass Fortsetzbarkeit ein stärkeres Kriterium ist als Verbindbarkeit.

Lemma 5.4. *Sei (X, d) ein lokal kompakter innerer metrischer Raum. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $r > 0$, so dass gilt:*

(1) *Für alle $y \in \overline{B_r(x)}$ gibt es eine minimierende Geodätische von x nach y.*
(2) *Wenn $d(x, y) \geq r$, dann gibt es einen Punkt z mit $d(x, z) = r$, welcher zwischen x und y liegt, d.h.*

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y),$$

und es gibt eine minimierende Geodätische von x nach z, deren Punkte auch alle zwischen x und y liegen.

Proof. Die Lokalkompaktheit besagt, dass es für jedes $x \in X$ ein $r > 0$ gibt, so dass $\overline{B_{2r}(x)}$ kompakt ist.

(1) Sei $y \in \overline{B_r(x)}$. Es gibt eine Folge $c_n : [0, 1] \to X$ von Kurven von x nach y mit $L(c_n) \to d(x, y)$. Also gilt für alle n (bis auf endlich viele), dass $L(c_n) < 2r$ ist und somit c_n in die kompakte Menge $\overline{B_{2r}(x)}$ abbildet. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli hat c_n eine konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert sei c. Dann gilt:

$$L(c) \leq \liminf_{n \to \infty} L(c_n) = d(x, y).$$

Trivialerweise gilt auch $L(c) \geq d(x, y)$, da c eine Kurve von x nach y ist. Somit ist c eine minimierende Geodätische.
(2) Sei $c_n : [0, L(c_n)] \to X$ eine Folge von Kurven von x nach y mit $L(c_n) \to d(x, y)$, parameterisiert nach Bogenlänge. Wegen der Kompaktheit von $\overline{B_{2r}(x)}$ hat $c_n(r)$ einen Häufungspunkt z. Dieser liegt zwischen x und y, denn aus $L(c_n) - d(x, y) \in [0, \varepsilon)$ folgt:

$$\begin{aligned} d(x, z) + d(z, y) &\leq d(x, c_n(r)) + d(c_n(r), y) + 2\varepsilon \\ &\leq L(c_n|_{[0,r]}) + L(c_n|_{[r, L(c_n)]}) + 4\varepsilon \\ &= L(c_n) + 4\varepsilon \\ &\leq d(x, y) + 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Die Kurven $c_n|_{[0,r]}$ haben eine konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert c hat Länge

$$\begin{aligned} L(c) &\leq \liminf_{n\to\infty} L(c_n|_{[0,r]}) \\ &= \liminf_{n\to\infty} r = r = d(x,z), \end{aligned}$$

und somit ist c eine minimierende Geodätische.

$\square$

Definition 5.5. Sei $a \in \mathbb{R},\ b \in (a,\infty]$. Eine Geodätische $c : [a,b) \to X$ heißt **Strahl**, wenn $\lim_{t\to b^-} c(t)$ nicht existiert.

(Dies weicht von der häufig benutzten Definition ab, ein Strahl sei eine minimierende Geodätische $[0,\infty) \to X$).)

Theorem 5.6. *Sei (X,d) ein lokal kompakter innerer metrischer Raum. Für jedes Paar x,y von Punkten in X existiert entweder eine minimierende Geodätische von x nach y, oder es gibt ein $\omega \in (0, d(x,y))$ und einen Strahl $c : [0,\omega) \to X$ mit $c(0) = x$, so dass c bogenlängenpararmetrisiert ist und jeder Punkt auf c zwischen x und y liegt, d.h. für alle $t \in [0,\omega)$ gilt*

$$d(x,y) = d(x,c(t)) + d(c(t),y).$$

Proof. Aufgrund des vorigen Lemmas gibt es $r > 0$, so dass jedes z in $\overline{B_r(x)}$ sich mittels einer minimierenden Geodätischen mit x verbinden läßt und für alle sonstigen Punkte $y \in X \setminus B_r(x)$ ein Punkt z existiert mit $d(x,z) = r$, welcher zwischen x und y liegt. Sei r_1 das Supremum der Menge solcher r.

Wenn es keine minimierende Geodätische von x nach y gibt, dann gibt es ein z_1 mit $d(x,z_1) = r_1/2$ und eine minimierende Geodätische c_1 von x nach z_1, so dass jeder Punkt auf c_1 zwischen x und y liegt.

Wiederholen dieser Prozedur mit x ersetzt durch $z_1$liefert ein $r_2 > 0$, ein z_2 mit $d(z_1,z_2) = r_2/2$ und eine minimierende Geodätische c_2 von z_1 nach z_2, usw. Damit kommen wir entweder mit endlich vielen Wiederholungen bei y an. In dem Fall ist die Verkettung der c_i eine minimierende Geodätische.

Oder wir kommen nicht mit endlich vielen Wiederholungen bei y an. Dann muss $R := \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n < d(x,y)$ und somit $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ gelten. Also gibt es einen Grenzwert $z := \lim_{n\to\infty} z_n$, welcher auch zwischen x und y liegt, mit $d(x,z) = R$. Anwendung des vorigen Lemmas auf z liefert $r_z > 0$, so dass jeder Punkt im $B_{r_z}(z)$ mit z mittels einer minimierenden Geodätischen verbunden werden kann. Wenn also n so groß ist, dass $d(z_n, z) < r_z/2$ ist, dann ist das ein Widerspruch zu $r_n \to 0$. $\square$

6. Riemann'sche Geometrie

6.1. **Kovariante Ableitung.** Wir würden gerne ein Vektorfeld längs einer Kurve (oder in Richtung eines anderen Vektorfelds) ableiten. Sei also V ein Vektorfeld auf M (oder zumindest in einer Umgebung eines Punkts $p \in M$ definiert), und sei $c = c(t)$ eine Kurve durch p, die zumindest für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist mit $c(0) = p$. Dann können wir natürlich den Ausdruck

$$\frac{d}{dt} V(c(t))|_{t=0}$$

bilden. Dummerweise ist das kein Vektor in T_pM, sondern in TT_pM. Wir hätten gerne eine Größe, im Folgenden

$$\frac{D}{dt} V \quad \text{bzw.} \quad \frac{D}{dt} V(c(t))|_{t=0}$$

geschrieben, die in $T_{c(0)}M$ liegt und welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Linearität: Für $V, W \in Vek(M)$ und Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ soll gelten:

$$\frac{D}{dt}(aV + bW) = a \cdot \frac{D}{dt} V + b \cdot \frac{D}{dt} W.$$

(2) Produktregel: Für$V \in Vek(M)$ und $f : M \to R$ soll gelten:

$$\frac{D}{dt}(f \cdot V) = \left(\frac{d}{dt} f \right) \cdot V + f \cdot \frac{D}{dt} V.$$

(3) Wenn die Kurven c und $\tilde{c}$ gleiche Geschwindigkeitsvektoren haben, d.h. $\frac{d}{dt}|_{t=0} c(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \tilde{c}(t)$, dann soll gelten:

$$\frac{D}{dt} V(c(t))|_{t=0} = \frac{D}{dt} V(\tilde{c}(t))|_{t=0}.$$

Wenn dies so ist, dann hängt $\frac{D}{dt} V(c(t))|_{t=0}$ nur von V und $\dot{c}(0)$ ab. Daher können wir folgende Notation einführen:

$$\frac{D}{dt} V(c(t))|_{t=0} = \nabla_{\dot{c}(0)} V.$$

D.h., für $w \in T_pM$ schreiben wir

$$\nabla_w V := \frac{D}{dt} V(c(t))|_{t=0},$$

wobei c eine beliebige Kurve ist mit $\dot{c}(0) = w$.
Wenn W ein Vektorfeld ist, dann ist $\nabla_W V$ überall da definiert, wo V und W es sind.

(4) Das in (3) Gesagte bedeutet, dass die Ableitung $\nabla_W V$ vom Vektorfeld W nur den Wert punktweise sieht (anstatt in einer ganzen Umgebung). Von einer Richtungsableitung erwarten wir Linearität in der Richtung. Deshalb soll für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten, dass $\nabla_{aW+bZ} V = a\nabla_W V + b\nabla_Z V$. Da der Wert des Vektorfelds $aW + bZ$ an einem Punkt p nicht davon abhängt, ob a eine einfache Zahl ist ist oder eine (nicht notwendigerweise konstante) Funktion, gilt somit für beliebige (glatte) Funktionen f, g auf M, dass

$$\nabla_{f\cdot W+g\cdot Z} V = f \cdot \nabla_W V + g \cdot \nabla_Z V.$$

(5) Produktregel für das Riemann'sche Skalarprodukt: Wenn V und W Vektorfelder sind, dann soll gelten

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle.$$

Es stellt sich heraus, dass diese 5 Eigenschaften das Objekt noch nicht eindeutig festlegen, und noch folgende Bedingung nötig ist:

(6) („Symmetrie“) $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$.

...

7. Struktur von TTM: Sasaki-Skalarprodukt, fast komplexe Struktur, symplektische Form

Zunächst untersuchen wir, wie das Bündel TTM in die sog. *horizontale* und *vertikale* Komponente aufgespalten wird:

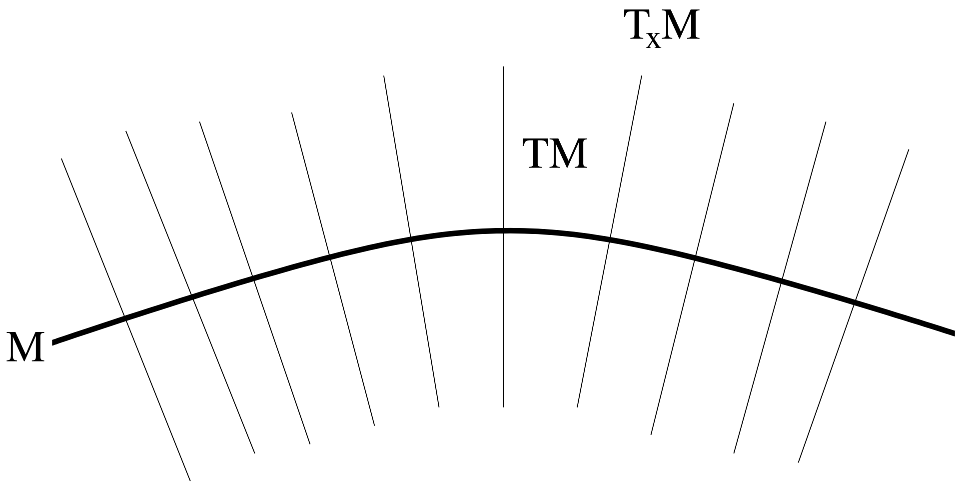
Der **vertikale Unterraum** von TTM ist

$$V := \text{Kern}\, d\pi,$$

wobei $\pi : TM \to M$ die **kanonische Projektion** ist. D.h. für $v \in T_x M$ ist

$$V(v) := \text{Kern}\left(d\pi|_v\right).$$

Die Bezeichnung „vertikal“ kommt daher, dass bei einem beliebigen Vektorraumbündel über einer Mannigfaltigkeit die Fasern, d.h. die einzelnen Vektorräume, typischerweise senkrecht gezeichnet werden:



Deswegen heißen die Fasern „senkrechte Unterräume“.

Diese Art der Zeichnung ist speziell für das Tangentialbündel ungewohnt, denn Tangentialräume werden eher tangential (in diesem Bild also mehr horizontal) gezeichnet; das Wort „vertikal“ wird hier aber trotzdem benutzt.

V hat die halbe Dimension von TM. Nun hätten wir gerne einen dazu senkrechten (oder zumindest komplementären) Unterraum, den wir dann *horizontal* nennen können. Allerdings gibt es keine kanonische Wahl, sondern die Wahl hängt vom Zusammenhang auf TM ab. Folgendes sind 2 äquivalente Definitionen für den horizontalen Unterraum:

Definition 7.1. Sei

$$\xi \in T_v TM,$$

also

$$\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} Z(t)$$

mit einer Kurve $Z = Z(t)$, welche Werte in TM hat und Anfangswert $Z(0) = v$. Die **Zusammenhangsabbildung** (engl. **connection map**) ist definiert durch

$$K : TTM \to TM, \quad T_x M \to TT_x M,$$

$$K(\xi) := \nabla_{\frac{d}{dt}(\pi Z)} Z(0).$$

Lemma 7.2. *Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve Z ab, sofern Z die Bedingung $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} Z(t)$ erfüllt.*

Definition 7.3. Sei $v \in T_x M$ und sei c eine C^1-Kurve in M mit $\dot{c}(0) = v$. Sei das Vektorfeld $A = A(t)$ definiert als der Paralleltransport von v längs $c = c(t)$. Der ***horizontale Lift*** *von v ist*

$$L_{horiz} : TTM \to TM, \quad T_x M \to TT_x M,$$

$$L_{\text{horiz}}(v) := \frac{d}{dt}|_{t=0}A(t).$$

Theorem 7.4. ***(Eigenschaften von K und L_{horiz}):***

- *K ist linear.*
- *L_{horiz} ist linear.*
- *Kern$K$ = BildL_{horiz}.*
- *$d\pi \circ L_{\text{horiz}} = id|_{TM}$.*
- *$TTM = H \oplus V$,d.h. $\forall v \in TM$ gilt $T_vTM = H(v) \oplus V(v)$.*
- *$d\pi \circ K = id|_{TM}$.*
- *$d\pi|_{H(v)} = id|_{T_xM}$ für $v \in T_xM$.*
- *$K|_{V(v)} = id|_{T_xM}$ für $v \in T_xM$.*
- *Es gibt einen (linearen) Isomorphismus*

$$d\pi \times K : TTM \to TM \times TM.$$

Proof. Die Linearität ergibt sich aus der Definition: Bei der Definition von K hängt Z linear mit ξ zusammen, d.h. wenn $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}Z(t)$ und $\xi_2 = \frac{d}{dt}|_{t=0}Z_2(t)$, dann gilt trivialerweise $a\xi + b\xi_2 = a\frac{d}{dt}|_{t=0}Z(t)\xi + b\frac{d}{dt}|_{t=0}Z(t)$. Die Basispunkte des Vektorfelds ändern sich bei linerarer Operation gar nicht, d.h. wenn Z und Z_2 Vektorfelder längs einer Kurve $c = \pi Z = \pi Z_2$ sind, dann ist $\frac{d}{dt}\pi Z = \frac{d}{dt}\pi\left(aZ + bZ_2\right)$. Somit ändert sich der Term $\nabla_{\frac{d}{dt}Z}Z(0)$ linear in ξ.

Ähnlich zeigt man die Linearität von L_{horiz}: Der Paralleltransport hängt linear vom Vektor v ab.

Kern$K$ = BildL_{horiz} : Sei zunächst $\xi \in TTM$, $\xi = L_{\text{horiz}}(v)$, $v \in TM$. Sei $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}A(t)$ und $A = A(t)$ der Paralleltransport von v längs c, wobei $\dot{c}(0) = v$. Per Definition von Paralleltransport ist die kovariante Ableitung eines Vektorfelds längs einer Kurve genau dann 0, wenn das Feld parallel ist. Hier gilt also

$$K\xi = \nabla_{\dot{c}}A(0) = 0.$$

Sei umgekehrt $K\xi = 0$, d.h. $0 = \nabla_{\frac{d}{dt}(\pi Z)}Z(0)$ mit $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}Z$. Dann folgt, dass

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0}Par_{c(t)\mapsto c(0)}Z(t),$$

d.h Z ist parallele Familie längs $c(t) = \left(\pi Z\right)(t)$, also ist

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}Z(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}A(t)$$

wobei A so ist wie in der Definition von L_{horiz}. □

Remark 7.5. Zum Isomorphismus
$$d\pi \times K : TTM \to TM \times TM :$$
Sei $J = J(t)$ ein **Jacobifeld** längs einer Geodätischen c. D.h.: Sei $c_\varepsilon(t)$ eine Variation von Geodätischen (also c_ε eine Geodätische für jedes ε nahe 0, und $c_0 = c$). Das zugehörige Variationsvektorfeld
$$J(t) := \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} c_\varepsilon(t)$$
heißt dann Jacobifeld.

Für so ein Jacobifeld gilt: Die Anfangsdaten $J(0), \frac{d}{dt}J(0)$ sind gegeben durch
$$\left(J(0), \frac{d}{dt}J(0)\right) = (d\pi\xi, K\xi)\,,$$
wobei
$$\xi = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \frac{d}{dt}|_{t=0} c_\varepsilon(t).$$
Definition 7.6. Auf TTM ist ein Skalarprodukt, genannt **Sasaki-Metrik**, definiert durch
$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle d\pi\xi, d\pi\eta \rangle + \langle K\xi, K\eta \rangle.$$
Auf $TTM = TM \times TM$ ist eine **fast komplexe Struktur J** (d.h. $\mathbf{J}^2 = -\mathrm{id}$) definiert durch
$$\mathbf{J} : TM \times TM \to TM \times TM,$$
$$(v, w) \mapsto (-w, v),$$
bzw.
$$\mathbf{J} : TTM \to TTM,$$
$$\xi \mapsto (d\pi \times K)^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (d\pi\xi, K\xi)\,.$$

Damit erhalten wir auch eine **symplektische Form** auf TTM :
$$\Omega(\xi, \eta) := \langle\langle \mathbf{J}\xi, \eta \rangle\rangle = \langle d\pi\xi, K\eta \rangle - \langle K\xi, d\pi\eta \rangle.$$