1 Der Satz von Darboux

Satz 1.1 (Darboux[1]) *Zu jedem Punkt $x \in M$ einer symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es lokale Koordinaten, so dass χ in diesen Koordinaten lokal konstant ist.*

Definition 1.2 *Es sei V ein linearer Raum und $\Omega^2(V)$ die Menge der schiefsymmetrischen bilinearen Formen, X ein Vektorfeld auf V. Wir führen die folgende Abbildung ein*

$$\mathbf{i}_X : \Omega^2(V) \times V \to V^* : (\chi, x) \mapsto \chi^*(X(x)),$$

oder

$$\mathbf{i}_{X(x)}(v) = \chi(X(x), v),$$

für $x, v \in V$. Diese Abbildung bezeichnen wir als innere Multiplikation.

Bemerkung 1.3 *Eine entsprechende Abbildung kann man auch für symplektische und allgemeine Differentialformen definieren.*

Lemma 1.4 *M sei eine glatte Mannigfaltigkeit, φ_t sei eine Familie von Diffeomorphismen $M \to M$, X_t sei das diese Familie erzeugende Vektorfeld $M \to TM$ und σ^t eine einparametrige Schar von Differentialformen auf M. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*(\sigma^t)) = \varphi_t^* \left(\frac{d}{dt}\sigma^t + \mathbf{i}_X \mathrm{d}\sigma^t + \mathrm{d}(\mathbf{i}_X \sigma^t) \right).$$

Beweis. Wir beginnen mit einem Sezialfall, $M = N \times I$, wobei N eine glatte Mannigfaltigkeit sei, $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $\varphi_t(x, s)$ sei durch

$$\varphi_t(x, s) = (x, s + t),$$

so dass

$$X_t = \frac{\partial}{\partial s}.$$

[1]Jean Gaston Darboux (14.8.1842-23.2.1917) arbeitete vor allem in der Geometrie und Flächentheorie. Er hatte wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik in Frankreich

Wir betrachten σ^t eine Differentialform der Ordnung $k+1$, wir schreiben symbolisch

$$\sigma^t(x,s) = \mathrm{d}s \wedge a(x,s,t)\mathrm{d}x^k + b(x,s,t)\mathrm{d}x^{k+1}$$

wobei $a(x,s,t)\mathrm{d}x^k$ steht für

$$a(x,s,t)\mathrm{d}x^k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(x,s,t)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

und entsprechend für den Ausdruck $b\mathrm{d}x^{k+1}$. Dann ergibt sich

$$\varphi_t^*(\sigma^t) = \mathrm{d}s \wedge a(x,s+t,t)\mathrm{d}x^k + b(x,s+t,t)\mathrm{d}x^{k+1}.$$

Dann erigbt sich

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\sigma^t = \mathrm{d}s \wedge D_2 a\mathrm{d}x^k + D_2 b\mathrm{d}x^{k+1} + \mathrm{d}s \wedge D_3 a\mathrm{d}x^k + D_3 b\mathrm{d}x^{k+1}.$$

Für $\varphi_t^*\frac{d}{dt}\sigma^t$ ergibt sich

$$\varphi_t^*\frac{d}{dt}\sigma^t = \mathrm{d}s \wedge D_3 a\mathrm{d}x^k + D_3 b\mathrm{d}x^{k+1}$$

Mit $X_t = \frac{\partial}{\partial s}$ ergibt sich

$$\mathbf{i}_{X_t}\sigma^t = a(x,s,t)\mathrm{d}x^k.$$

Die Anwendung von d auf diesen Ausdruck liefert in der symbolischen Schreibweise

$$\mathrm{d}\mathbf{i}_{X_t}\sigma^t = \frac{\partial}{pts}a(x,s,t)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}x^k + \partial x a\mathrm{d}x^{k+1}.$$

In der selben Schreibweise notieren wir

$$\mathrm{d}\sigma^t = -\mathrm{d}s \wedge \partial_x a\mathrm{d}x^{k+1} + \partial_s b\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}x^k + \partial_x b\mathrm{d}x^{k+2}.$$

Wenden wir $\mathbf{i}_X$ darauf an erhalten wir

$$\mathbf{i}_X\mathrm{d}\sigma^t = -\partial_x a\mathrm{d}x^{k+1} + \partial_s b\mathrm{d}x^{k+1}.$$

Holt man nun diese Ausdrücke mit φ_t^* zurück und addiert, so erhält man die gewünschte Formel.

Für den zweiten Teil betrachte das kommutative Diagramm in Berndt, S. 39. Die Wahl von $X_t(m)$ und dem Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial s}$ führt auf

$$(F_*)_{(m,t)}(\frac{\partial}{\partial s}) = X_t(m).$$

Man hat für $\eta \in T_m M$

$$j_* \eta = (\eta, 0) \in T_{(m,0)}(M \times I).$$

Durch ψ_t bekommt man

$$(\psi_t)_* j_* \eta = (\eta, 0) \in T_{(m,t)}(M \times I).$$

Dann gilt

$$(F_t)_* \eta = F_* (\psi_t)_* j_* \eta \in T_{F_t(m)} M.$$

Ist nun σ_t eine $k+1$-Form auf M, so gilt $\mathbf{i}_X \sigma_t$ ist eine k-Form auf M und $(F_t)^* \mathbf{i}_X \sigma^t$ ist eine k-Form auf M. Diese ist gegeben durch

$$(F_t)^*(\mathbf{i}_X \sigma^t)_m(\eta_1, \ldots, \eta_k) = \sigma^t(X_t(m), (F_t)_{*m}\eta_1, \ldots, (F_t)_{*m}(\eta_k).$$

Nun leiten wir dafür einen neuen Ausdruck her indem wir die rechte Seite sukszessive auf der rechten Seite des Diagrams zurückholen. Also ist

$$\begin{aligned}
(F_t)^*(\mathbf{i}_X \sigma^t)_m(\eta_1, \ldots, \eta_k) &= (\sigma^t)_{F(m,t)}(F_* \frac{\partial}{\partial s}, (F_*)_{(m,t)}(\eta_1, 0) \ldots,) \\
&= (F^* \sigma^t)_{(m,t)}(\frac{\partial}{\partial s}, (\eta - 1, 0), \ldots) \\
&= \left(\mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial s}} F^* \sigma^t \right)_{(m,t)} ((\eta_1, 0), \ldots,) \\
&= \psi_t^* \left(\mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial s}} F^* \sigma_t \right) ((\eta_1, 0), \ldots) \\
&= (j^* \psi^*) \left(\mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial s}} F^* \sigma_t \right)_{(m,0)} (\eta_1, \ldots, \eta_k)
\end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes von Darboux. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist χ eine Form in einer Umgebung der Null im $\mathbb{R}^n$. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass

$$\chi_0 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}x_j.$$

Dies folgt einfach daraus, dass man die Form in Normalform bringen kann. Nun konstruieren wir einen Diffeomorphismus φ, der in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, so dass

$$\varphi^* \chi = \chi_0$$

ist. Setze

$$\chi^t = \chi + t(\chi_0 - \chi),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Nächster Schritt ist es eine Familie von Diffeomorphismen φ^t zu konstruieren mit

$$(\varphi^t)^* \chi^t = \chi_0. \tag{1}$$

Durch Differenzieren wird (1) zur Differentialgleichung. Das entsprechende Vektorfeld muss dabei der folgenden Gleichung genügen:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^t)^* \chi^t = (\varphi^t)^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \chi^t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \chi^t \right).$$

Mit der Formel von Cartan

$$\mathcal{L}_X = \mathbf{i}_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \mathbf{i}_X.$$

ergibt sich aus $\mathrm{d}\chi = 0$

$$0 = (\varphi^t)^* \left(\mathrm{d}(\mathbf{i}_{X_t} \chi^t) + \chi - \chi_0 \right).$$

Demzufolge muss X_t der Gleichung

$$\mathrm{d}(\mathbf{i}_{X_t} \chi^t) + \chi - \chi_0 = 0 \tag{2}$$

genügen. Da $\chi - \chi_0$ geschlossen ist, ist es lokal exakt, also gibt es eine 1-Form β auf U mit

$$\mathrm{d}\beta = \chi - \chi_0$$

und $\beta(0) = 0$. Da $\chi^t(0) = \chi_0$ ist, gibt es eine Umgebung W von 0, so dass im Intervall $[0, 1]$ für $y \in W$ die Form $\chi^t(y)$ nicht degeneriert ist. Daher gibt es genau ein Vektorfeld X_t mit

$$\mathbf{i}_{X_t} \chi^t = \chi^t(X_t, .) = -\beta,$$

für $t \in [0, 1]$ und $y \in W$. Damit löst X_t die Gleichung (2). Damit existiert der Fluss zu X_t auf $[0, 1]$ für $w \in W$. Dieser Fluss hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

2 Komplexe und fast komplexe Strukturen

2.1 Kähler-Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1 *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine* komplexe Struktur *auf V ist durch einen linearen Operator $\mathbb{J} : V \to V$ mit $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{1}$ definiert.*

Bemerkung 2.2 Mit $iv = \mathbb{J}v$ wird ein reeller Raum mit komplexer Struktur zum komplexen Vektorraum. Die Bedingung $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{1}$ ergibt, $(-1)^{\dim V} = \det(-\mathbb{1}) = \det \mathbb{J}^2 = (\det \mathbb{J})^2 = 1$, also ist $\dim V$ gerade. Ist W ein komplexer Vektorraum, so ist W auch ein reeller Vektorraum der doppelten Dimension. Wir setzen nun $\mathbb{J}w = iw$ und erhalten eine komplexe Struktur.

Für einen komplexen Hilbertraum H definiert der Imaginärteil des komplexen inneren Produktes eine symplektische Form auf dem reellen Hilbertraum $H^{\mathbb{R}}$, wobei $H^{\mathbb{R}}$ einfach den reellen Raum bezeichnet, der durch „Vergessen" der komplexen Struktur entsteht. Andererseits, ist H ein reeller Hilbertraum, χ eine schief-symmetrische, schwach nicht degenerierte Bilinearform, dann existiert eine komplexe Struktur $\mathbb{J}$ und ein reelles Skalarprodukt $\langle .,. \rangle_0$ auf H, so dass

$$\langle z, w \rangle_0 = -\chi(\mathbb{J}z, w).$$

Durch

$$\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, w \rangle_0 - i\chi(z, w)$$

definiert man ein hermitesches inneres Produkt auf H. Dies folgt aus dem Rieszschen Darstellungsatz und dem Satz von Lax-Milgram aus der Funktionalanalysis (vgl. Abraham and Marsden, Foundations of Mechanics, S. 173). Ein Spezialfall dieser Überlegungen ist durch die Identifikation von $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ gegeben:

$$z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) = ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)).$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} -\mathrm{Im}\langle (z_1, \ldots, z_n), (z_1', \ldots, z_n') \rangle_{\mathbb{C}} &= -\mathrm{Im}(z_1 \overline{z_1'} + \ldots + z_n \overline{z_n'}) \\ &= -(x_1' y_1 - x_1 y_1' + \ldots + x_n' y_n - x_n y_n'). \end{aligned}$$

Damit kann die symplektische Form auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ als

$$\chi(z, z') = -\mathrm{Im}\langle z, z' \rangle_{\mathbb{C}} = \mathrm{Re}\langle iz, z' \rangle_{\mathbb{C}}$$

geschrieben werden, was mit der Konvention, dass $\mathbb{J}$ der Multiplikation mit i entspricht, entspricht.

Definition 2.3 *Eine* fast komplexe Struktur $\mathbb{J}$ *auf einer Mannigfaltigkeit* M *ist eine glatte Abbildung* $\mathbb{J} : TM \to TM$ *mit*

1. $\mathbb{J}$ *macht das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} TM & \to & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & M \end{array}$$

   kommutativ und

2. *für alle* $x \in M$ *ist* $\mathbb{J}_x : T_xM \to T_xM$ *eine komplexe Struktur.*

Eine Mannigfaltigkeit mit fast komplexer Struktur, heißt fast komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition 2.4 *Eine Mannigfaltigkeit* M *heißt komplexe Mannigfaltigkeit, falls es einen Atlas gibt, dessen Karten Werte in einem komplexen Banachraum annehmen, und dessen Übergangsabbildungen*

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(V \cap U) \to \varphi_U(U \cap V)$$

holomorphe Abbildungen sind.

Lemma 2.5 *Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist fast komplex.*

Beweis. Auf jeder Kartenumgebung U wird mittels der Karte φ_U eine komplexe Struktur induziert. Da die Übergangsabbildungen biholomorph sind, stimmen die von φ_U bzw. φ_V auf $U \cap V$ induzierten fast komplexen Strukturen überein. □

Ist M eine fast komplexe Mannigfaltigkeit, so ist jede Faser T_xM ein komplexer Vektorraum.

Definition 2.6 *Eine* hermitesche Metrik[2] *auf* M *ist eine glatte Zuordnung* $x \to \langle .,. \rangle_x$ *eines komplexen inneren Produktes.*

[2]Hermite

Auf einer fast komplexen Mannigfaltigkeit kann man eine vorgegebene hermitesche Metrik wiederum in Real- und Imaginärteil zerlegen. Der Realteil bildet eine Riemann'sche Metrik, der Imaginärteil eine nicht degenerierte 2-Form ω.

Definition 2.7 *Eine komplexe Mannigfaltigkeit mit hermitescher Metrik, so dass* $\mathrm{d}\omega = 0$ *ist, wird* Kähler Mannigfaltigkeit[3] *genannt.*

Lemma 2.8 *Eine Kähler Mannigfaltigkeit ist eine symplektische Mannigfaltigkeit, deren symplektische Struktur durch*

$$\chi_x(u_x, v_x) = \langle \mathbb{J}_x u_x, v_x \rangle_x$$

gegeben ist.

Beweis. Folgt sofort aus den vorherigen Definitionen. □

Beispiel 2.9

1. Es sei H ein komplexer Hilbertraum. Dann ist H trivialerweise eine Kähler Mannigfaltigkeit.

2. Ein nichttriviales Beispiel einer Kähler Mannigfaltigkeit konstruiert man folgendermaßen. Ausgehend von einem komplexen Hilbertraum H betrachtet man den projektiven Raum $\mathbb{P}H$, den Raum der komplexen Geraden in H. Wir haben bereits gesehen, wie ein komplexer Hilbertraum zum symplektischen Raum wird. Es sei

$$\pi : H \setminus \{0\} \to \mathbb{P}H$$

die kanonische Projektion. Wir bezeichnen für $\psi \in H$ das Bild unter π mit $[\psi]$. $\mathbb{P}H$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit, π ist eine glatte Abbildung. Der Tangentialraum an $\mathbb{P}H$ im Punkt ψ ist gegeben durch

$$T_{[\psi]}\mathbb{P}H = H/\mathbb{C}\psi.$$

Der Kern der Abbildung

$$D_\psi \pi : H \to T_\psi \mathbb{P}H$$

[3] Erich Kähler (16.1.1906-31.5.2000) lehrte in Königsberg, Leipzig, Hamburg, Leipzig, Berlin und wieder Hamburg. Er arbeitete am n-Körper Problem und beschäftigte sich mit Funktionentheorie, speziell mit Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Er war ein früher Anhänger des Differentialformenkalküls.

ist gegeben durch $\mathbb{C}\psi$. daher ist $D_\psi\pi$ auf $\mathbb{C}\psi^\perp$ ein komplex linearer Isomorphismus, der allerdings vom Repräsentanten $\psi \in [\psi]$ abhängt. Ist $U : H \to H$ ein unitärer Operator, dann definiert

$$[U][\psi] = [U\psi]$$

einen biholomorphen Diffeomorphismus auf $\mathbb{P}H$.

Satz 2.10 1. *Eine hermitesches inneres Produkt auf $T_{[\psi]}\mathbb{P}H$ wird durch*

$$\langle D_\psi\pi(\phi_1), D_\psi\pi(\phi_2) = 2\hbar\langle\phi_1, \phi_2\rangle$$

definiert. Dabei sind $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$ und $\phi_{1,2} \in \mathbb{C}\psi^\perp$. Dieses innere Produkt hängt nicht von $\psi \in [\psi]$ ab. Es ist glatt in $[\psi]$ und definiert daher eine hermitesche Metrik auf $\mathbb{P}H$. Es ist invariant unter $\{[U] \mid U \in \mathbf{U}(H\}$

2. *Für $[\psi] \in \mathbb{P}H$, $\|\psi\| = 1$ und $\varphi_{1,2} \in \mathbb{C}\psi^\perp$ definiert*

$$g_{[\psi]}(D_\psi\pi(\varphi_1, D_\psi\pi(\varphi_2)) = 2\hbar\mathrm{Re}\langle\psi_1, \psi_2\rangle$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{P}H$. Diese Metrik ist invariant unter $\{[U] \mid U \in \mathbf{U}(H)\}$.

3. *Für $[\psi] \in \mathbb{P}H$, $\|\psi\| = 1$ und $\varphi_{1,2} \in \mathbb{C}\psi^\perp$ definiert*

$$\chi_{[\psi]}(D_\psi\pi(\varphi_1, D_\psi\pi(\varphi_2)) = -2\hbar\mathrm{Im}\langle\psi_1, \psi_2\rangle$$

eine symplektische Form auf $\mathbb{P}H$, welche unter $\{[U] \mid U \in \mathbf{U}(H\}$ invariant ist.

Beweis.

1. Zunächst zur Definition der hermiteschen Form. Sei $[\psi]$ die Klasse von ψ. Wir setzen für $\phi_{1,2} \in T_{[\psi]}\mathbb{P}H$

$$\langle\phi_1, \phi_2\rangle_{[\psi]} = 2\hbar\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_H,$$

wobei $\phi_j = D_\psi\pi(\varphi_j)$ und $\varphi_j \in \mathbb{C}\psi^\perp$. Zu zeigen ist, dass diese Definition nicht von der Wahl von $\psi \in [\psi]$ und von der Wahl von $\varphi_j \in D_\psi\pi^{-1}(\phi_j)$ abhängig ist.

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\pi(\lambda(\psi + t\varphi)) = \pi(\psi + t\varphi).$$

Da

$$D_{\lambda\psi}(\lambda\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\lambda\psi + t\lambda\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{dt}\pi(\psi + t\varphi) = D_\psi(\varphi),$$

folgt $D_{\lambda\psi}(\lambda\varphi) = D_\psi\pi(\varphi)$. Als nächstes zeigen wir: ist $D_{\lambda\psi}(\tilde{\varphi}) = D_\psi(\varphi)$ und sind $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathbb{C}\psi^\perp$ so folgt $\tilde{\varphi} = \lambda\varphi$.

$$\left.\begin{array}{rcl} D_{\lambda\psi}(\tilde{\varphi}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\lambda\psi + t\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\psi + t\frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi}) & = & D_\psi(\frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi}) \\ & = & D_\psi(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\varphi - \tilde{\phi} \in \ker D_\psi\pi$$

Ist speziell $\|\lambda\psi\| = \|\psi\| = 1$, so ist $|\lambda| = 1$ und es folgt aus der Definition

$$\begin{aligned} \langle (D_{\lambda\psi}\pi)(\lambda\varphi_1), (D_{\lambda\psi}\pi(\lambda\varphi_2)\rangle_{[\psi]} &= 2\hbar\langle\lambda\varphi_1, \lambda\varphi_2\rangle_H \\ &= 2\hbar\|\lambda\|^2\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_H \\ &= 2\hbar\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle \\ &= \langle (D_\psi\pi)\varphi_1, (D_\psi\pi)\varphi_2\rangle_H. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Definition der hermiteschen Metrik unabhängig von $\psi \in [\psi]$ mit $\|\psi\| = 1$ und unabhängig von φ ist. Für $\psi \in H \setminus \{0\}$ und $\varphi_{1,2} \in H$ (nicht notwendig in $\mathbb{C}\psi^\perp$) hat man

$$\langle D_\psi\pi(\varphi_1), D\psi\pi(\varphi_2)\rangle_{[\psi]} = 2\hbar\|\psi\|^{-2}(\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_H - \|\psi\|^{-2}\langle\varphi_1, \psi\rangle_H\langle\psi, \varphi_2\rangle_H).$$

Die rechte Seite ist glatt in $\psi \in H \setminus \{0\}$. Eine lokale Beschreibung von $T_{[\psi]}\mathbb{P}H$ erhält man aus $\mathbb{C}\psi^\perp$. Damit sieht man, dass diese Formel sich auf $\mathbb{P}H$ überträgt.

Sei nun U eine unitäre Abbildung auf H und $[U]$ die induzierte Abbildung auf $\mathbb{P}H$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{[\psi]}[U]D_\psi\pi(\varphi) &= D_{[\psi]}[U]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\psi + t\varphi) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[U][\psi + t\varphi] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[U(\psi + t\varphi)]_{|t=0} \\ &= D_{U\psi}\pi(U\varphi). \end{aligned}$$

Wegen $\|U\psi\| = \|\psi\| = 1$ und $\langle U\varphi_j, U\psi\rangle_H = 0$ folgt nun aus der Definition der hermiteschen Metrik

$$\begin{aligned}\langle D_{[\psi]}[U]D_\psi\pi(\varphi_1), D_{[\psi]}[U]D_\psi\pi(\varphi_2)\rangle_{\mathbb{P}H} &= \langle D_{U\psi}\pi(U\varphi_1, D_{U\psi}\pi(U\varphi_2)\rangle_H \\ &= \langle U\varphi_1, U\varphi_2\rangle_H \\ &= \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_H \\ &= \langle D_\psi\pi(\varphi_1), D_\psi\pi(\varphi_2)\rangle_{\mathbb{P}H}.\end{aligned}$$

Damit die Invarianz unter der unitären Gruppe gezeigt.

2. Folgt sofort aus der Tatsache, dass $g_{[\psi]}$ Realteil einer hermiteschen Form ist.

3. Es folgt sofort, dass $\chi_{[\psi]}$ eine Form ist, welche unitär invariant ist, also
$$[U]^*\chi = \chi.$$
Damit ist auch
$$[U]^*\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}\chi.$$
Wähle speziell U_0 mit $U_0\psi = \psi$ und $U_{0|_{\mathbb{C}\psi^\perp}} = -\mathbb{1}_{\mathbb{C}\psi^\perp}$. Seien nun $\varphi_j \in \mathbb{C}\psi^\perp$ für $j = 1, 2, 3$. Dann gilt
$$D_{[\psi]}[U_0]D_\psi\pi(\varphi_j) = D_\psi\pi(-\varphi_j).$$
Eingesetzt in die Trilinearform $\mathrm{d}\chi$ folgt dann für $\phi_j = D_\psi\pi(\varphi_j)$ aus der Invarianz gegen U_0
$$\mathrm{d}\chi_{[\psi]}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \mathrm{d}\chi_{[\psi]}D_{[\psi]}[U_0]\phi_1, D_{[\psi]}[U_0]\phi_2, D_{[\psi]}[U_0]\phi_3),$$
dass $\mathrm{d}\chi = 0$ ist. Die Form ist nicht degeneriert, denn es entspricht der üblichen quantenmechanischen Form auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}\psi^\perp$.

□

3 Kotangentialbündel als smplektische Mannigfaltigkeiten

Es sei M eine Mannigfaltigkeit, T^*M sei das Kotangentialbündel. Wir wollen sehen, dass dies in natürlicher Weise zu einer symplektischen Mannigfaltigkeit führt.

3.1 Die kanonische 1-Form

Sei $\pi : T^*M \to M$ die kanonische Projektion. Dann bildet das Differential

$$T\pi : T(T^*M) \to TM$$

ab. Ist nun $\beta \in T^*M$, $v \in T_\beta T^*M$, so setzen wir

$$\vartheta_\beta(v) = \beta(T\pi(v)).$$

Stellen wir uns Elemente in $T(T * M)$ als Äquivalenzklassen von Kurven $\gamma(t)$ in T^*M vor, dann ist $\gamma'(0)$ ein Paar von Paaren, das wir lokal schreiben als $s = (m, \beta, h, *)$ mit $h \in T_mM$. Nun ist $T\pi(s) = (m, h)$ und die oben angegebene Formel ergibt $\beta(h)$. ϑ nennt man die kanonische 1-Form.

3.2 Die symplektische Form

Aufgrund der Vorüberlegungen in $\omega = -\mathrm{d}\vartheta$ eine 2-Form. Da $\mathrm{d}^2\vartheta = 0$ ist diese geschlossen. Um nachzuweisen, dass diese symplektisch ist, reicht es, dies in lokalen Koordinaten nachzuprüfen. Dazu sei M ein Vektorraum, T^*M ist einfach $M \times M^*$, wobei M^* der duale Vektorraum ist. Punnkte in diesem Raum sind dann von der Form (u, β), wobei jeweils $u \in M$, $\beta \in m^*$ ist. Seien $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ die Koordinaten auf T^*M. Eine Basis von $T_\beta T^*M$ erhält man als

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}\right).$$

Dann schreiben wir

$$(u, \beta) = (\sum_j u_j \frac{\partial}{\partial q_j}, \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial p_j}).$$

Dann ergibt sich

$$\mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i((u, \beta), (v, \gamma)) = u_i\gamma_i - \beta_i v_i.$$

Die kanonische 1-Form ergibt sich

$$\vartheta_{(w,\beta)} = \beta(w) = \sum_i \beta_i w_i.$$