Blockseminar
Ergodentheorie und Dynamische Systeme
Partielle Hyperbolizität und Ergodizität

Doris Bohnet

8.09.-12.09.08

1. Partielle Hyperbolizität
   - Einleitung
   - Definition
   - Beispiele
   - Unterbündel
   - Blätterungen
2. Ergodizität
   - Ergodizität von Anosov-Diffeomorphismen

Klassifikation dynamischer Systeme

Wie verhält sich ein *typisches* dynamisches System? Was sind generische Eigenschaften von dynamischen Systemen?

C^1-strukturstabile dynamische Systeme $\Leftrightarrow$ Hyperbolizität
Kupka-Smale: Generische Eigenschaften von C^r-Diffeomorphismen sind die Hyperbolizität von periodischen Punkten und die Transversalität von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit zweier periodischer Punkte
$\Longrightarrow$ Hyperbolische Mengen sind mit Strukturstabilität korreliert
$\Longrightarrow$ Suche nach Invarianten unter der Konjugation, z.B. Entropie, sowie nach robusten Eigenschaften, z.B. robuster topologischer Transitivität oder stabiler Ergodizität (maßtheoretisches Analogon).

Verallgemeinerungen von Hyperbolizität

- nichtuniforme Hyperbolizität: *Pesin-Theorie (1977).*
- partielle Hyperbolizität: *Pesin und Brin (1974), Pugh und Shub (1970).*
- dominated splitting: *Mañé (1982).*

Vermutung

Ein typischer volumenerhaltender partiell hyperbolischer C^2-Diffeomorphismus auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist stabil ergodisch.

Bisher ist diese Aussage nur für spezielle volumenerhaltende partiell hyperbolische Diffeomorphismen bewiesen. Es wird deshalb vermutet, dass die speziellen Eigenschaften eigentlich generische sind und auf diesem Wege die Vermutung bewiesen werden könnte.

Sei M eine kompakte, zusammenhängende, ränderlose, Riemannsche C^∞-Mannigfaltigkeit.

Partielle Hyperbolizität

Ein C^2-Diffeomorphismus $f : M \to M$ heißt **partiell hyperbolisch**, falls für das Tangentialbündel TM eine nichttriviale stetige, df-invariante Zerlegung in stabile, instabile und zentrale Unterbündel E^s, E^u und E^c existiert, für die folgende Wachstumsschranken gelten: Es gibt Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3$ mit $\mu_1 < 1 < \lambda_3$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} c^{-1}\lambda_1^n &\leq \|d_x f^n(v)\| \leq c\mu_1^n \quad \forall v \in E^s(x), \\ c^{-1}\lambda_2^n &\leq \|d_x f^n(v)\| \leq c\mu_2^n \quad \forall v \in E^c(x), \\ c^{-1}\lambda_3^n &\leq \|d_x f^n(v)\| \leq c\mu_3^n \quad \forall v \in E^u(x), \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Genauer spricht man im obigen Fall von **partiell hyperbolisch im engeren Sinne**.
- Es existiert eine Riemannsche Metrik, so dass $c = 1$ und $\lambda_3 = \mu_1^{-1}, \mu_3 = \lambda_1^{-1}, \lambda_2 = \mu_2^{-1}$ gewählt werden können. Setze $\mu := \mu_1$, $\lambda := \lambda_1$ und $\gamma = \lambda_2$. Diese Metrik ist allerdings nur noch hölderstetig und nicht mehr differenzierbar, aber äquivalent zur differenzierbaren Riemannschen Metrik der Mannigfaltigkeit.

Bemerkungen

- Die Konstanten λ_i, μ_i, $i = 1, 2, 3$, sind unabhängig von $x \in M$, d.h. die Wachstumsraten des Diffeomorphismus sind gleichmäßig beschränkt.
- Die Stetigkeit der Zerlegung $T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$ folgt aus der Voraussetzung der gleichmäßigen Schranken und der df-Invarianz. Weiter läßt sich zeigen, dass die Zerlegung stetig von f in der C^1-Topologie abhängt.

Torusautomorphismen

Auf einem n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n$ für $n \geq 3$ ist jeder Automorphismus, der von einer Matrix $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ induziert wird, die Eigenwerte betragsmäßig kleiner als 1, gleich 1 und größer als 1 besitzt, partiell hyperbolisch. Das einfachste Beispiel auf dem 3-Torus $\mathbb{T}^3$ sieht wie folgt aus: Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \ |\lambda| < 1.$$

Dann ist die Abbildung

$$T_A : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3, \quad x \mapsto Ax$$

partiell hyperbolisch. Die Unterräume $E^u(x), E^s(x), E^c(x)$ sind gerade die Eigenräume zu λ, λ^{-1} und 1.

Direkte Produkte

Sei $f : M \to M$ ein Anosov-Diffeomorphismus mit stabilen und instabilen Unterbündeln E^s_f und E^u_f, sowie $g : N \to N$ ein Diffeomorphismus, so dass für die Wachstumsschranken gilt:

$$\max_{x\in M} \left\| df|_{E^s_f(x)} \right\| < \min_{y\in N} \left\| dg^{-1}(y) \right\|^{-1} <$$
$$\max_{y\in N} \| dg(y) \| < \min_{x\in M} \left\| df^{-1}|_{E^u_f(x)} \right\|^{-1}.$$

Dann ist das direkte Produkt

$$\begin{aligned} F : M \times N &\to M \times N, \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)), \end{aligned}$$

partiell hyperbolisch.

Spezialfälle

- Sei f wieder ein Anosov-Diffeomorphismus auf M und $g = \mathbb{I}_N$ die Identität. Dann ist

$$\begin{aligned} F : M \times N &\to M \times N, \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y)\,, \end{aligned}$$

partiell hyperbolisch.

- Wähle $N = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $g = \mathrm{R}_\alpha$, die Rotation um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dann ist das direkte Produkt

$$\begin{aligned} F : M \times N &\to M \times N, \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y + \alpha) \end{aligned}$$

ein partiell hyperbolischer Diffeomorphismus.

Gruppenerweiterungen

Sei G eine kompakte Liegruppe und $\phi : M \to G$ eine glatte Abbildung. Sei $f : M \to M$ ein Anosov-Diffeomorphismus, der ein glattes Wahrscheinlichkeitsmaß ν erhält. Dann definiere

$$\begin{aligned} F_\phi : M \times G &\to M \times G, \\ (x, g) &\mapsto (f(x), \phi(x)g) \,. \end{aligned}$$

$\phi(x)$ ist eine Linkstranslation auf G, also ist das normierte Haar-Maß ν_G auf G invariant unter dieser Abbildung. Die Gruppenerweiterung F_ϕ ist partiell hyperbolisch und erhält das Produkt-Maß $\nu \times \nu_G$.

Beispiel

Sei $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Addition und $\phi : M \to G,\ x \mapsto \alpha(x)$ eine glatte Funktion, die jedem $x \in M$ einen Winkel $\alpha(x) \in \mathbb{S}^1$ zuordnet. Dann entspricht dies wieder einer Rotation $\mathrm{R}_{\alpha(x)}$ in der zweiten Komponente:

$$F_\phi : (x, g) \mapsto \left(f(x), R_{\alpha(x)} g\right) = (f(x), g + \alpha(x)) .$$

Es ist ein offenes Problem, welche Mannigfaltigkeiten überhaupt die Existenz eines partiell hyperbolischen Diffeomorphismus erlauben.

- Es muss wegen stabiler, instabiler und zentraler Richtung $\dim M \geq 3$ gelten.
- Auf jedem Torus $\mathbb{T}^n$ mit $n \geq 1$ gibt es partiell hyperbolische Diffeomorphismen. Die von einer Matrix $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ wie im obigen Beispiel induzierte Automorphismus $T_A(x) = Ax$ ist partiell hyperbolisch und volumenerhaltend.
- Auf allen kompakten dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe, z.B. der Sphäre $\mathbb{S}^3$, gibt es keinen partiell hyperbolischen Diffeomorphismus (Brin, Burago, Ivanov).

- Die Zerlegung des Tangentialbündels ist eindeutig.
- In der angepassten Riemannschen Metrik sind die Teilbündel paarweise senkrecht zueinander, d.h.

$$\measuredangle E^i(x), E^j(x) = \frac{\pi}{2}, \quad i \neq j,\ i, j = s, c, u.$$

- Die Unterbündel $E^i,\ i = s, c, u$ sind **hölderstetig**, d.h. es existieren Konstanten $0 < \alpha < 1$ und $C > 0$, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\measuredangle E^i(x), E^i(y) \leq C d(x, y)^{\alpha} \quad 0 < \alpha < \frac{\log \mu - \log \gamma}{\log \lambda}.$$

$\Rightarrow$ Hasselblatt hat gezeigt, dass die Unterbündel für Anosov-Diffeomorphismen typischerweise nicht glatt sind, sondern nur hölderstetig.

Das stabile Unterbündel E^s ist zu einer stabilen Blätterung $\mathcal{W}^s$ integrabel, d.h. es existiert zu jedem $x \in M$ eine (eindeutige) C^1-immergierte Untermannigfaltigkeit $W^s(x)$ mit $\dim W^s(x) = E^s(x)$, so dass $T_y W^s(x) = E^s(y)$ für alle $y \in W^s(x)$ gilt. Die Mannigfaltigkeit $W^s(x)$ heißt **stabile Mannigfaltigkeit** von x.

Eigenschaften der stabilen Blätterung

- Die Blätterung $\mathcal{W}^s$ ist f-invariant, d.h. $f\left(W^s(x)\right) = W^s\left(f(x)\right)$ für alle $x \in M$.
- Die Blätterung $\mathcal{W}^s$ ist kontrahierend, d.h. es gilt für alle $x \in M, y \in W^s(x)$ und $n \geq 0$

$$d_{W^s(x)}\left(f^n(x), f^n(y)\right) \leq C\left(\lambda + \epsilon\right)^n d_{W^s(x)}(x, y),$$

  mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$ und $C = C(\epsilon) > 0$ konstant.
- Ist f ein C^2-Diffeomorphismus, so ist $W^s(x)$ eine C^2-Mannigfaltigkeit für jedes $x \in M$. Die Glattheitseigenschaften von f vererben sich allgemein auf jedes Blatt, aber nicht auf die Blätterung!

Ganz analog läßt sich die Existenz einer instabilen Blätterung $\mathcal{W}^u$ zeigen.

Probleme macht das zentrale Unterbündel E^c:

Es ist nicht unbedingt integrabel und falls es integrabel ist, muss es nicht eindeutig integrabel sein, d.h. es kann mehrere Integralmannigfaltigkeiten $W^c(x)$ geben, so dass $T_y W^c(x) = E^c(y)$ für alle $y \in W^c(x)$ gilt.

Ergodentheorie

- Boltzmann-Hypothese (1887): Zeitmittel = Raummittel für unzerlebare Systeme
- 1. Ergodensatz von Neumann (1931)
- Eigenschaften und Klassifizierung von maßtheoretischen dynamischen Systemen.

Maßtheoretisches dynamisches System

Ein maßtheoretisches dynamisches System $(X, \mathfrak{A}, \mu, T)$ besteht aus einem Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und einer meßbaren Abbildung $T : X \to X$, d.h. es gilt $T^{-1}(A) \in \mathfrak{A}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.
Das System heißt **maßerhaltend** bzw. das Maß μ heißt T-**invariant**, falls für jede meßbare Menge $A \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A).$$

Im Folgenden sei das Maß μ immer endlich. Dann läßt es sich normieren, d.h. es gelte $\mu(X) = 1$. Der Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ kann damit als Wahrscheinlichkeitsraum angenommen werden und μ als Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ergodizität

Eine maßerhaltende Abbildung T ist ergodisch, falls jede T-invariante meßbare Menge entweder volles Maß oder Maß Null besitzt, d.h.

$$A \in \mathfrak{A}, T^{-1}(A) = A \;\Rightarrow \mu(A) = 0 \;\vee\; \mu(X \setminus A) = 0.$$

Dies bedeutet anschaulich, dass das System nicht in kleinere invariante Teilsysteme zerlegt werden kann.

Beispiel

Ein einfaches Beispiel ist die Rotation $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto x + \alpha$ um einen konstanten Winkel α. Das einzige normierte translationsinvariante Maß auf $[0, 1)$ ist das Lebesgue-Maß λ, das unter R_α also invariant ist. Anschaulich ist klar, dass R_α genau dann ergodisch ist, wenn α irrational ist.

Man weiß, dass zu jedem Homöomorphismus T auf einem kompakten Raum X mindestens ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ existiert. Es ist weiter bekannt, dass es mindestens ein ergodisches Maß μ_{erg} zu T gibt.
Das Problem ist aber, dass dieses Maß keinerlei physikalisch sinnvolle Interpretation besitzen muß, wie dies z.B. für das Lebesgue-Maß als Volumen der Fall ist. Deshalb fragt die glatte Ergodentheorie, ob ein glattes, also ein zum Volumen äquivalentes Maß, ergodisch ist.
Diese Einschränkung muß nicht sinnvoll sein: Es gibt auch Ansätze, die sich mit nichtglatten, aber sogenannten physikalischen Maßen beschäftigen, die die Dynamik des Systems abbilden (SRB (Sinai-Ruelle-Bowen)-Maße).