Einführung in die Morse-Theorie: Änderung der Homotopieklasse von $f^{-1}((-\infty, a])$ bei nicht einem degenerierten kritischen Punkt

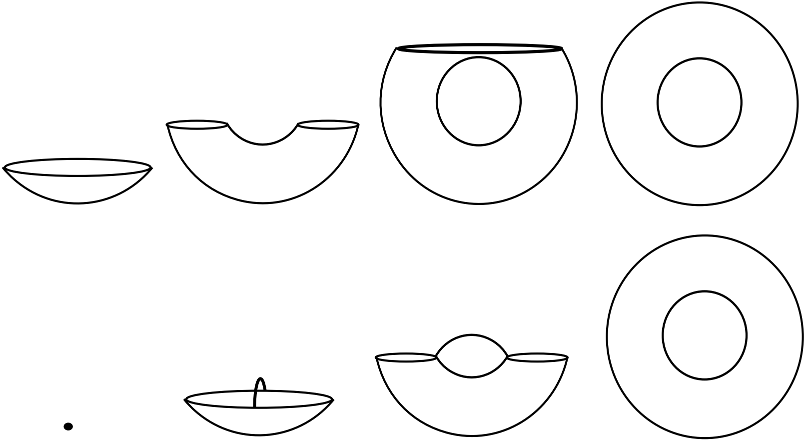
Mara Sommerfeld

Universität Hamburg

Seminar Dynamische Systeme und Ergodentheorie
September 2008

1. Einführung
2. Definitionen
   - Morse-Index
   - Topologische Begriffe
3. Hauptteil
   - Keine kritischen Punkte enthalten $\Rightarrow$ Homotopieäquivalenz
   - Lemma von Morse
   - Änderung der Homotopieklasse bei einem nicht degenerierten kritischen Punkt
   - Beweis des Lemmas von Morse
4. Literatur

Einführung



Kritischer Punkt

Im Folgenden bedeutet *glatt* immer C^∞. Mit einer *Mannigfaltigkeit* ist immer eine C^∞-Mannigfaltigkeit gemeint.

Kritischer Punkt

Im Folgenden bedeutet *glatt* immer C^∞. Mit einer *Mannigfaltigkeit* ist immer eine C^∞-Mannigfaltigkeit gemeint.

Definition

Sei f eine glatte reellwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit. Ein Punkt p von M heißt *kritischer Punkt* von f, falls die Ableitung $df : T_pM \to \mathbb{R}$ die Nullabbildung ist.

Hessesche Bilinearform

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Für eine Karte $x : M \ni U \to \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ bilden die Vektoren $(dx)^{-1}(e_i)$ eine Basis von T_pM, für die man üblicherweise ∂_{x_i} schreibt.

Hessesche Bilinearform

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Für eine Karte $x : M \ni U \to \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ bilden die Vektoren $(dx)^{-1}(e_i)$ eine Basis von T_pM, für die man üblicherweise ∂_{x_i} schreibt.
Desweiteren sei $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p))$.

Hessesche Bilinearform

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Für eine Karte $x : M \ni U \to \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ bilden die Vektoren $(dx)^{-1}(e_i)$ eine Basis von T_pM, für die man üblicherweise ∂_{x_i} schreibt.
Desweiteren sei $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p))$.

Lemma

Es sei p ein kritischer Punkt einer glatten reellwertigen Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M.

Hessesche Bilinearform

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Für eine Karte $x : M \ni U \to \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ bilden die Vektoren $(dx)^{-1}(e_i)$ eine Basis von T_pM, für die man üblicherweise ∂_{x_i} schreibt.
Desweiteren sei $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p))$.

Lemma

Es sei p ein kritischer Punkt einer glatten reellwertigen Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es eine symmetrische Bilinearform $Hf_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, so dass für jedes lokale Koordinatensystem x gilt:

$$Hf_p(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

Hf_p heißt Hessesche Bilinearform.

Morse-Index

Definition

Ein kritischer Punkt einer glatten reellwertigen Funktion auf einer Mannigfaltigkeit heißt *nicht degeneriert*, falls die Hessesche Bilinearform nicht ausgeartet ist.

Morse-Index

Definition

Ein kritischer Punkt einer glatten reellwertigen Funktion auf einer Mannigfaltigkeit heißt *nicht degeneriert*, falls die Hessesche Bilinearform nicht ausgeartet ist.

Definition

Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt von einer glatten reellwertigen Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit. Die Dimension λ des Unterraumes, auf dem die Hessesche Bilinearform negativ definit ist, heißt *Morse-Index* oder auch *Index* von f in p.

Homotopie

Definition

$f, g : X \to Y$ seien stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y. Falls es eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle x, heißen f und g *homotop*.

Homotopie

Definition

$f, g : X \to Y$ seien stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y. Falls es eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle x, heißen f und g *homotop*. Man schreibt $f \simeq g$.

Homotopie

Definition

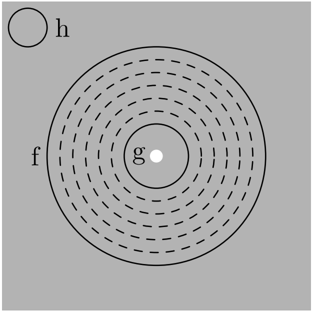
$f, g : X \to Y$ seien stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y. Falls es eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle x, heißen f und g *homotop*. Man schreibt $f \simeq g$. Die Abbildung H ist eine *Homotopie* von f nach g.

Homotopie

Definition

$f, g : X \to Y$ seien stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y. Falls es eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle x, heißen f und g *homotop*. Man schreibt $f \simeq g$. Die Abbildung H ist eine *Homotopie* von f nach g.

Beispiel: $f, g, h : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$



f und g sind homotop, h ist weder zu f noch zu g homotop.

Deformationsretrakt

Definition

A sei ein Teilraum von einem topologischen Raum X. A heißt *Deformationsretrakt* von X falls es eine Homotopie H gibt, für die gilt:

$$H(x,0) = x \qquad \text{für alle } x \in X \tag{1}$$

$$H(x,1) \in A \qquad \text{für alle } x \in X \tag{2}$$

$$H(a,t) = a \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und für alle } t \in [0,1] \tag{3}$$

Homotopieklasse

Definition

Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ und $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$.

Homotopieklasse

Definition

Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es stetige Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ und $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$.

Bemerkung

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen*.

Homotopieklasse

Definition

Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ und $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$.

Bemerkung

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen*.

Beispiel:
$A \subset X$ sei ein Deformationsretrakt von X mit der zugehörigen Homotopie H. Wähle

$$\begin{aligned} f : X \to A, &\quad f(x) = H(x, 1) \\ g : A \to X, &\quad f(a) = a \end{aligned}$$

Dann gilt $f \circ g = \mathbb{1}_A$ und $g \circ f = f = H(\cdot, 1) \simeq \mathbb{1}_X$.

Ankleben einer k-dimensionalen Zelle

Definition

Die abgeschlossene k-dimensionale Einheitskugel $e^k = \left\{x \in \mathbb{R}^k \middle| x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\right\}$ wird im Folgenden als eine k-dimensionale Zelle bezeichnet.

Ankleben einer k-dimensionalen Zelle

Definition

Die abgeschlossene k-dimensionale Einheitskugel $e^k = \left\{x \in \mathbb{R}^k \middle| x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\right\}$ wird im Folgenden als eine k-dimensionale Zelle bezeichnet.
Der Rand ist $S^{k-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^k \middle| x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1\right\}$.

Ankleben einer k-dimensionalen Zelle

Definition

Die abgeschlossene k-dimensionale Einheitskugel $e^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\}$ wird im Folgenden als eine k-dimensionale Zelle bezeichnet.
Der Rand ist $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k | x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1\}$.

Definition

Sei Y ein topologischer Raum und $g : S^{k-1} \to Y$ eine stetige Abbildung vom Rand der k-dimensionalen Zelle nach Y.

Ankleben einer k-dimensionalen Zelle

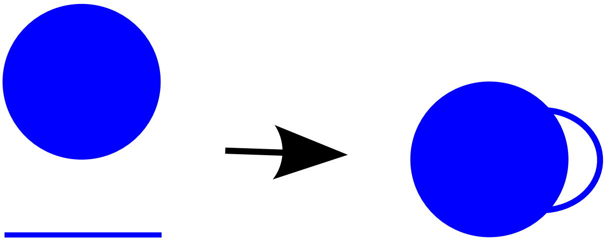
Definition

Die abgeschlossene k-dimensionale Einheitskugel $e^k = \left\{x \in \mathbb{R}^k \middle| x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\right\}$ wird im Folgenden als eine k-dimensionale Zelle bezeichnet.
Der Rand ist $S^{k-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^k \middle| x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1\right\}$.

Definition

Sei Y ein topologischer Raum und $g : S^{k-1} \to Y$ eine stetige Abbildung vom Rand der k-dimensionalen Zelle nach Y. Dann verstehen wir unter Y *mit einer angeklebten k-dimensionalen Zelle* den Raum, der aus der disjunkten Vereinigung von Y und e^k entsteht, wenn der Rand S^{k-1} mit seinem Bild in Y identifiziert wird.

Beispiel: Ankleben einer 1-dimensionalen Zelle an eine Kreisscheibe



Keine kritischen Punkte enthalten $\Rightarrow$ Homotopieäquivalenz

Definition

$M^a := f^{-1}((-\infty, a])$

Keine kritischen Punkte enthalten $\Rightarrow$ Homotopieäquivalenz

Definition

$M^a := f^{-1}((-\infty, a])$

Satz

f sei eine glatte reellwertige Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. $a < b$ seien reelle Zahlen, so dass die Menge $f^{-1}([a, b])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält. Dann gilt:

Keine kritischen Punkte enthalten ⇒ Homotopieäquivalenz

Definition

$M^a := f^{-1}((-\infty, a])$

Satz

f sei eine glatte reellwertige Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. $a < b$ seien reelle Zahlen, so dass die Menge $f^{-1}([a, b])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält. Dann gilt: Die Mengen M^a und M^b sind diffeomorph.

Keine kritischen Punkte enthalten $\Rightarrow$ Homotopieäquivalenz

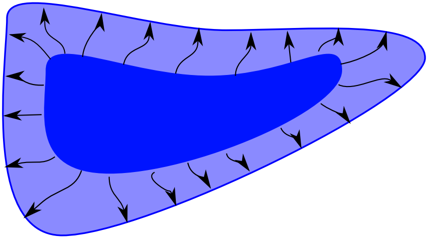
Definition

$M^a := f^{-1}((-\infty, a])$

Satz

f sei eine glatte reellwertige Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. $a < b$ seien reelle Zahlen, so dass die Menge $f^{-1}([a, b])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält. Dann gilt: Die Mengen M^a und M^b sind diffeomorph.
Zusätzlich ist M^a ein Deformationsretrakt von M^b.

Beweis

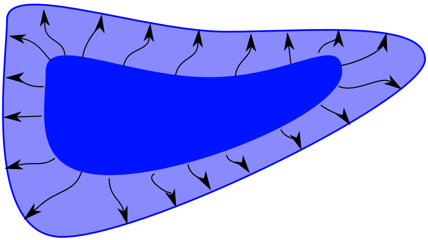


Beweis.

Wähle ein glattes Vektorfeld, das auf $f^{-1}([a,b])$ mit $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$ übereinstimmt und außerhalb einer kompakten Umgebung von $f^{-1}([a,b])$ verschwindet. Dann ist das Vektorfeld global Lipschitzstetig und erzeugt einen Fluss ϕ_t.

$\square$

Beweis



Beweis.

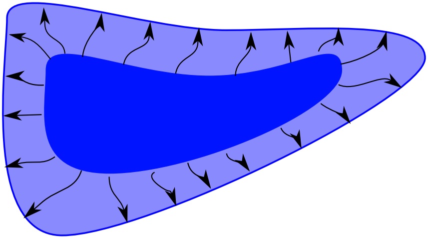
Auf $f^{-1}([a,b])$ gilt:

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) = \frac{1}{\|\nabla f(\phi_t(x))\|^2}\left\langle \nabla f(\phi_t(x)), \nabla f(\phi_t(x))\right\rangle = 1$$

Daher bildet der Diffeomorphismus $\phi_{b-a} : M \to M$ die Menge M^a auf M^b ab.

$\square$

Beweis



Beweis.

Entlang des Flusses lässt sich M^b zu M^a deformieren. Die zugehörige Homotopie lautet:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{falls } f(x) \leq a \\ \phi_{t(a-f(x))}(x) & \text{falls } a \leq f(x) \leq b \end{cases}$$

$\square$

Lemma von Morse

Lemma

Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt einer glatten Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gibt es eine Umgebung U von p und lokale Koordinaten $u_1, \dots u_n$ mit p im Ursprung, so dass auf U gilt:

$$f = f(p) - u_1^2 - u_2^2 - \dots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \dots + u_n^2$$

Dabei ist λ der Index von f an der Stelle p.

Der wichtigste Satz des Vortrags

Satz

Sei f eine glatte Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index λ. Es sei $f(p) = c$. Angenommen, es gibt ein $\tilde{\varepsilon}$, so dass $f^{-1}([c - \tilde{\varepsilon}, c + \tilde{\varepsilon}])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte außer p enthält.

Der wichtigste Satz des Vortrags

Satz

Sei f eine glatte Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index λ. Es sei $f(p) = c$. Angenommen, es gibt ein $\tilde{\varepsilon}$, so dass $f^{-1}([c - \tilde{\varepsilon}, c + \tilde{\varepsilon}])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte außer p enthält. Dann gibt es für genügend kleine ε einen Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$, der durch Anheften einer λ-dimensionalen Zelle an $M^{c-\varepsilon}$ entsteht.

Der wichtigste Satz des Vortrags

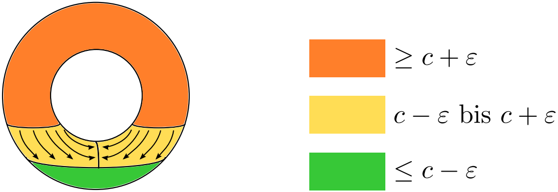
Satz

Sei f eine glatte Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index λ. Es sei $f(p) = c$. Angenommen, es gibt ein $\tilde{\varepsilon}$, so dass $f^{-1}([c - \tilde{\varepsilon}, c + \tilde{\varepsilon}])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte außer p enthält. Dann gibt es für genügend kleine ε einen Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$, der durch Anheften einer λ-dimensionalen Zelle an $M^{c-\varepsilon}$ entsteht.

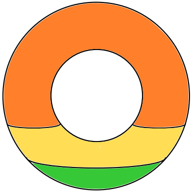
Bemerkung

Wenn $f^{-1}([c - \tilde{\varepsilon}, c + \tilde{\varepsilon}])$ kompakt ist, folgt für $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, dass $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge auf einer Mannigfaltigkeit ebenfalls kompakt ist.

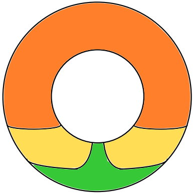
Beweisidee



Funktion f



Funktion F



Wahl von ε

Nach dem Lemma von Morse ist f auf einer Umgebung U von p von der Form

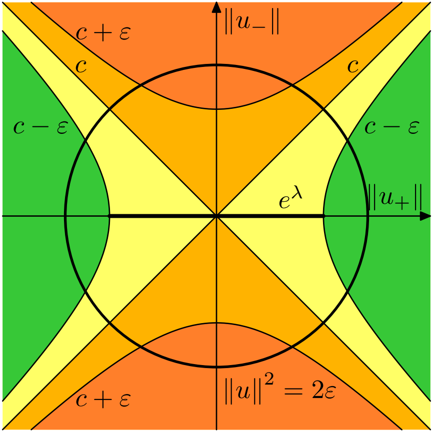
$$f = c - u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Wähle ε so klein, dass

- $F^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält,
- die Kugel $B_{\sqrt{2\varepsilon}}(0)$ im Bild der Einbettung $(u_1, \ldots, u_n) : U \to \mathbb{R}^n$ liegt.

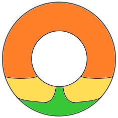
Situation

Wir betrachten das Bild der Einbettung $(u_1, \ldots, u_n) : U \to \mathbb{R}^n$.



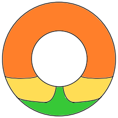
Wir schreiben $u = u_- + u_+$, wobei $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_- = (u_1, \ldots, u_\lambda, 0, \ldots, 0)$, $u_+ = (0, \ldots, 0, u_{\lambda+1}, \ldots, u_n)$. Mit e^λ bezeichnen wir die Menge $\{u | \, \|u\|^2 \leq \varepsilon, u_+ = 0\}$.

Bedingungen an F



Nun wird eine glatte Funktion F konstruiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

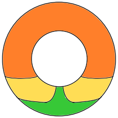
Bedingungen an F



Nun wird eine glatte Funktion F konstruiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ enthält die Menge $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda}$.

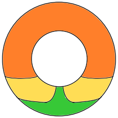
Bedingungen an F



Nun wird eine glatte Funktion F konstruiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ enthält die Menge $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda}$.
- $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$ und $f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ stimmen überein.

Bedingungen an F



Nun wird eine glatte Funktion F konstruiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ enthält die Menge $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda}$.
- $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$ und $f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ stimmen überein.
- Die Menge $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ enhält keine kritischen Punkte.

Träger von $f - F$

Wir wollen F konstruieren, indem wir eine glatte, nicht negative Funktion von f subtrahieren, die außerhalb einer Umgebung von p verschwindet.

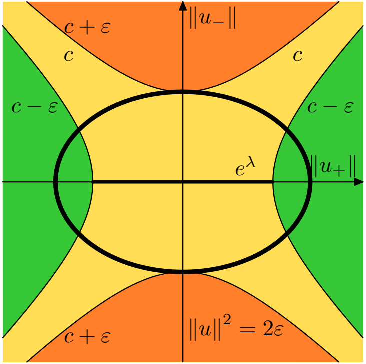
Träger von $f - F$

Wir wollen F konstruieren, indem wir eine glatte, nicht negative Funktion von f subtrahieren, die außerhalb einer Umgebung von p verschwindet. Wie könnte diese Umgebung aussehen?

Träger von $f - F$

Wir wollen F konstruieren, indem wir eine glatte, nicht negative Funktion von f subtrahieren, die außerhalb einer Umgebung von p verschwindet. Wie könnte diese Umgebung aussehen?

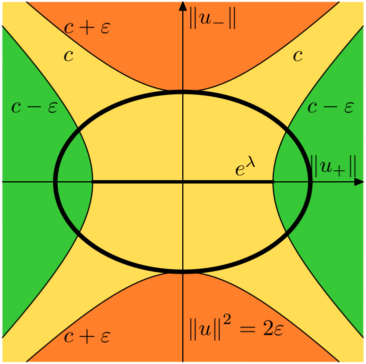
- Sie sollte eine Umgebung von e^λ enthalten.



Träger von $f - F$

Wir wollen F konstruieren, indem wir eine glatte, nicht negative Funktion von f subtrahieren, die außerhalb einer Umgebung von p verschwindet. Wie könnte diese Umgebung aussehen?

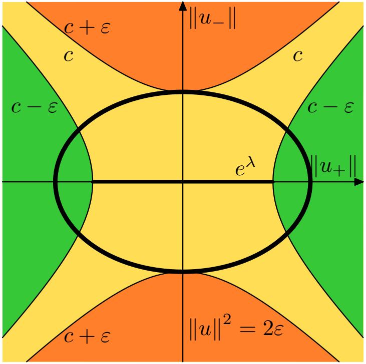
- Sie sollte eine Umgebung von e^λ enthalten.
- Damit $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$, wählen wir eine Umgebung, die in $M^{c+\varepsilon}$ enthalten ist.



Träger von $f - F$

Wir wollen F konstruieren, indem wir eine glatte, nicht negative Funktion von f subtrahieren, die außerhalb einer Umgebung von p verschwindet. Wie könnte diese Umgebung aussehen?

- Sie sollte eine Umgebung von e^λ enthalten.
- Damit $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$, wählen wir eine Umgebung, die in $M^{c+\varepsilon}$ enthalten ist.



Als Träger von $f - F$ kommt zum Beispiel der Ellipsoid $E := \left\{ u \middle| \|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2 \leq 2\varepsilon \right\}$ infrage. Tatsächlich werden wir $f - F$ so wählen, dass $f - f$ zum Rand von E hin kleiner wird und spätestens ab dem Rand gleich 0 ist.

Ellipsoid E

Lemma

Der Ellipsoid E liegt in $M^{c+\varepsilon}$.

Ellipsoid E

Lemma

Der Ellipsoid E liegt in $M^{c+\varepsilon}$.

Beweis.

Aus $\|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2 \leq 2\varepsilon$ folgt

$$f = c - \|u_-\|^2 + \|u_+\|^2 \leq c + \frac{1}{2}(\|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2) \leq c + \varepsilon$$

□

Ellipsoid E

Lemma

Der Ellipsoid E liegt in $M^{c+\varepsilon}$.

Beweis.

Aus $\|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2 \leq 2\varepsilon$ folgt

$$f = c - \|u_-\|^2 + \|u_+\|^2 \leq c + \frac{1}{2}(\|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2) \leq c + \varepsilon$$

□

Korollar

Wenn $F \leq f$ gilt und der Träger von $f - F$ in E liegt, folgt $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$

Definition von ξ und η

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Funktionen ein:

Definition

$$\xi(u) = \|u_-\|^2 = u_1^2 + \cdots + u_\lambda^2$$
$$\eta(u) = \|u_+\|^2 = u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Damit ergibt sich:

$$f = c + \xi - \eta.$$

$$E = \{\xi + 2\eta < 2\varepsilon\}$$

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- $\mu(r) = 0$ für $r \geq 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ Der Träger von $f - F$ liegt im Ellipsoiden E.

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- $\mu(r) = 0$ für $r \geq 2\varepsilon$
- $\mu(0) > \varepsilon$

$\Rightarrow$ Der Träger von $f - F$ liegt im Ellipsoiden E.
$\Rightarrow p \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- $\mu(r) = 0$ für $r \geq 2\varepsilon$
- $\mu(0) > \varepsilon$
- $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle r

$\Rightarrow$ Der Träger von $f - F$ liegt im Ellipsoiden E.
$\Rightarrow p \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$
Die Einschränkungen an die Ableitung stellen sicher, dass $F \leq f$, dass $e^{\lambda} \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$ und dass F in die gleichen kritischen Punkte wie f hat.

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- $\mu(r) = 0$ für $r \geq 2\varepsilon$
- $\mu(0) > \varepsilon$
- $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle r

$\Rightarrow$ Der Träger von $f - F$ liegt im Ellipsoiden E.
$\Rightarrow p \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$
$\Rightarrow F \leq f$:
Da $\mu(r) = 0$ für genügend große r und da die Ableitung nirgends positiv ist, muss $\mu(r) \geq 0$ auch für kleinere r gelten, also ist $F \leq f$.

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- $\mu(r) = 0$ für $r \geq 2\varepsilon$
- $\mu(0) > \varepsilon$
- $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle r

$\Rightarrow$ Der Träger von $f - F$ liegt im Ellipsoiden E.
$\Rightarrow p \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$
$\Rightarrow e^{\lambda} \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$:
$e^{\lambda} = \{\eta = 0, \xi \leq \varepsilon\}$.
Es gilt $\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1$. Da bereits $F(p) < c - \varepsilon$, gilt dies auch auf ganz e^{λ}.

Konstruktion von F

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- $\mu(r) = 0$ für $r \geq 2\varepsilon$
- $\mu(0) > \varepsilon$
- $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle r

$\Rightarrow$ Der Träger von $f - F$ liegt im Ellipsoiden E.

$\Rightarrow p \in F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$

$\Rightarrow$ F hat die gleichen kritischen Punkte wie f.

$$\begin{aligned} dF =& \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} =& -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} =& 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1 \end{aligned}$$

Auf U gilt $dF = 0$ daher nur, wenn $d\xi = 0$ und $d\eta = 0$, also im Punkt p.

Zusammenfassung und Folgerung

Die Konstruktion der Funktion F ist damit abgeschlossen. Wir wissen, dass $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ und dass die Menge $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ keine kritischen Punkte enthält. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Teilmenge $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ ist auch $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ kompakt.

Zusammenfassung und Folgerung

Die Konstruktion der Funktion F ist damit abgeschlossen. Wir wissen, dass $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ und dass die Menge $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ keine kritischen Punkte enthält. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Teilmenge $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ ist auch $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ kompakt.

Korollar

$F^{-1}(\infty, c-\varepsilon])$ *ist ein Deformationsretrakt von* $M^{c+\varepsilon}$.

Zusammenfassung und Folgerung

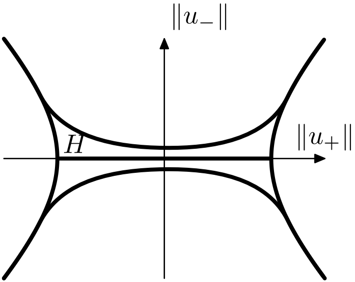
Die Konstruktion der Funktion F ist damit abgeschlossen. Wir wissen, dass $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ und dass die Menge $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ keine kritischen Punkte enthält. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Teilmenge $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ ist auch $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ kompakt.

Korollar

$F^{-1}(\infty, c-\varepsilon])$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$.

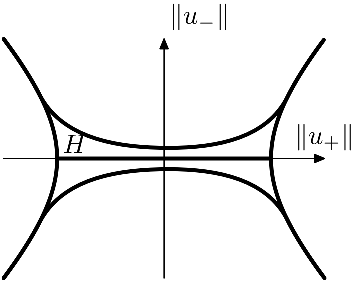
Wir müssen also nur noch zeigen, dass $M \cup e^{\lambda}$ eine Deformationsretrakt von $F^{-1}((\infty, c-\varepsilon])$ ist. Dabei wissen wir schon, dass $M \cup e^{\lambda} \subset F^{-1}(\infty, c-\varepsilon])$ gilt.

Lagebeschreibung



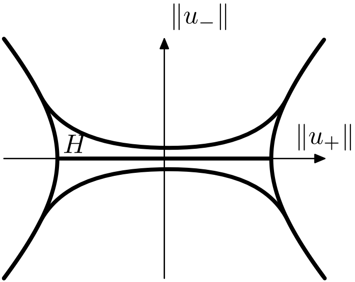
Die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ besteht aus $M^{c-\varepsilon}$ und einer Region $H = F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$.

Lagebeschreibung



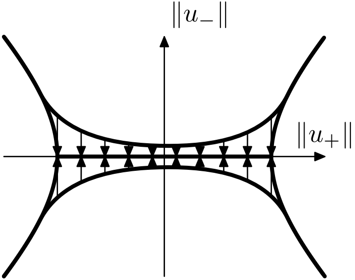
Die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ besteht aus $M^{c-\varepsilon}$ und einer Region $H = F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$. H enthält die Menge e^λ.

Lagebeschreibung



Die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ besteht aus $M^{c-\varepsilon}$ und einer Region $H = F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$. H enthält die Menge e^λ. Offensichtlich sind die gemeinsamen Punkte von e^λ und $M^{c-\varepsilon}$ genau die Randpunkte von e^λ, sie liegen im Rand von M.

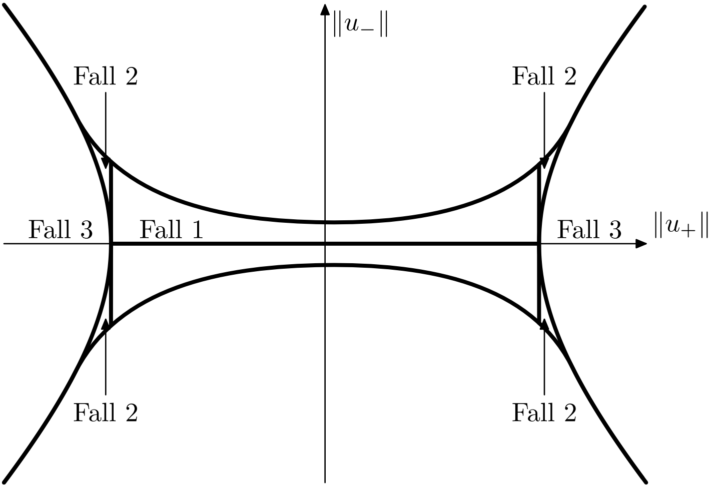
Lagebeschreibung



Die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ besteht aus $M^{c-\varepsilon}$ und einer Region $H = F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$. H enthält die Menge e^λ. Offensichtlich sind die gemeinsamen Punkte von e^λ und $M^{c-\varepsilon}$ genau die Randpunkte von e^λ, sie liegen im Rand von M.
Wir deformieren die Menge $M^{c-\varepsilon} \cup H$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$, indem wir H vertikal zusammenziehen.

Fallunterscheidung

Zur Definition der Deformation D unterscheiden wir drei Fälle:



Deformation von $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$

Für den zweiten Fall $u \in H$ und $\xi > \varepsilon$ definieren wir

$$s_t := 1 - t + t\sqrt{\frac{(\xi - \varepsilon)}{\eta}}.$$

Deformation von $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$

Für den zweiten Fall $u \in H$ und $\xi > \varepsilon$ definieren wir

$$s_t := 1 - t + t\sqrt{\frac{(\xi - \varepsilon)}{\eta}}.$$

Die Funktion D lautet:

$$D(t,u) = \begin{cases} u_- + tu_+ & \text{für } u \in H, \xi \leq \ eps \\ u_- + s_t u_+ & \text{für } u \in H, \xi \geq \varepsilon \\ u & \text{für } u \in M^{c-\varepsilon} \end{cases}$$

Deformation von $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$

Für den zweiten Fall $u \in H$ und $\xi > \varepsilon$ definieren wir

$$s_t := 1 - t + t\sqrt{\frac{(\xi - \varepsilon)}{\eta}}.$$

Die Funktion D lautet:

$$D(t,u) = \begin{cases} u_- + tu_+ & \text{für } u \in H, \xi \leq \ eps \\ u_- + s_t u_+ & \text{für } u \in H, \xi \geq \varepsilon \\ u & \text{für } u \in M^{c-\varepsilon} \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass D stetig ist und dass D die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ deformiert.

Wiederholung: Lemma von Morse

Lemma

Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt einer glatten Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gibt es eine Umgebung U von p und lokale Koordinaten $u_1, \ldots u_n$ mit p im Ursprung, so dass auf U gilt:

$$f = f(p) - u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Dabei ist λ der Index von f an der Stelle p.

Hilfslemma

Lemma

f sei eine glatte Funktion in einer konvexen Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$. Dann gibt es glatte Funtion $g_1, \ldots, g_n$, so dass

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

und zusätzlich $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Hilfslemma

Lemma

f sei eine glatte Funktion in einer konvexen Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$. Dann gibt es glatte Funtion $g_1, \ldots, g_n$, so dass

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

und zusätzlich $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Beweis.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i dt.$$

Man wähle $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) dt$. $\square$

Matrixdarstellung

Das Hilfslemma werden wir verwenden, um f ähnlich wie eine Bilinearform durch eine Matrix h_{ij} darzustellen, wobei die h_{ij} Funktionen sind:
$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_i, \cdot x_j$.

Matrixdarstellung

Das Hilfslemma werden wir verwenden, um f ähnlich wie eine Bilinearform durch eine Matrix h_{ij} darzustellen, wobei die h_{ij} Funktionen sind: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_i, \cdot x_j$. O. B. d. A. sei der nicht degenerierte kritische Punkt p von f der Punkt 0 in $\mathbb{R}^n$ und $f(p) = f(0) = 0$.

Matrixdarstellung

Das Hilfslemma werden wir verwenden, um f ähnlich wie eine Bilinearform durch eine Matrix h_{ij} darzustellen, wobei die h_{ij} Funktionen sind: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_i, \cdot x_j$. O. B. d. A. sei der nicht degenerierte kritische Punkt p von f der Punkt 0 in $\mathbb{R}^n$ und $f(p) = f(0) = 0$. Dann gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

wobei $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, da 0 ein kritischer Punkt ist.

Matrixdarstellung

Das Hilfslemma werden wir verwenden, um f ähnlich wie eine Bilinearform durch eine Matrix h_{ij} darzustellen, wobei die h_{ij} Funktionen sind: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_i, \cdot x_j$. O. B. d. A. sei der nicht degenerierte kritische Punkt p von f der Punkt 0 in $\mathbb{R}^n$ und $f(p) = f(0) = 0$. Dann gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

wobei $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, da 0 ein kritischer Punkt ist. Daher gilt auch für g_i:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$$

Matrixdarstellung

Das Hilfslemma werden wir verwenden, um f ähnlich wie eine Bilinearform durch eine Matrix h_{ij} darzustellen, wobei die h_{ij} Funktionen sind: $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x_1,\ldots,x_n) \cdot x_i, \cdot x_j$. O. B. d. A. sei der nicht degenerierte kritische Punkt p von f der Punkt 0 in $\mathbb{R}^n$ und $f(p) = f(0) = 0$. Dann gilt:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1,\ldots,x_n)$$

wobei $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, da 0 ein kritischer Punkt ist. Daher gilt auch für g_i:

$$g_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$$

Insgesamt folgt

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x_1,\ldots,x_n) \cdot x_i, \cdot x_j.$$

Diagonalisieren

Die Matrix h_{ij} ist in jedem Punkt symmetrisch.

Diagonalisieren

Die Matrix h_{ij} ist in jedem Punkt symmetrisch. Im nächsten Schritt soll die Matrix h_{ij} diagonalisiert werden, so dass in der Diagonalen nur Einräge 1 und -1 stehen.

Diagonalisieren

Die Matrix h_{ij} ist in jedem Punkt symmetrisch. Im nächsten Schritt soll die Matrix h_{ij} diagonalisiert werden, so dass in der Diagonalen nur Einräge 1 und -1 stehen.Das geschieht induktiv, wobei die Matrix nach jedem Schritt die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h'_{ij} \end{pmatrix}$$

Die Restmatrix h'_{ij} ist dabei wieder symmetrisch und regulär.

Wahl der neuen Koordinaten

Bei einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform wählt man dazu schrittweise eine neue Basis, wodurch die neuen Koordinaten definiert werden. Genauso, wie sich dabei die neuen Koordinaten aus den alten ergeben, werden wir auch in diesem Fall die neuen Koordinatenfunktionen definieren.

Wahl der neuen Koordinaten

Bei einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform wählt man dazu schrittweise eine neue Basis, wodurch die neuen Koordinaten definiert werden. Genauso, wie sich dabei die neuen Koordinaten aus den alten ergeben, werden wir auch in diesem Fall die neuen Koordinatenfunktionen definieren.

Wir nehmen induktiv an, dass wir vor dem r-ten Schritt Koordinaten $x_1, \dots x_n$ gewählt haben, so dass

$$f(x_1, \dots x_n) = \pm x_1^2 \cdots \pm x_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} H_{ij}(x_1, \dots, x_n) x_i, x_j$$

Wahl der neuen Koordinaten

H_{ij} ist symmetrisch und in einer Umgebung U von 0 regulär. Daher lassen sich die letzten $n - r + 1$ Koordinaten so verändern, dass $H_{rr} \neq 0$ auf U gilt. Es sei $g = \sqrt{|H_{rr}|}$.

Wahl der neuen Koordinaten

H_{ij} ist symmetrisch und in einer Umgebung U von 0 regulär. Daher lassen sich die letzten $n - r + 1$ Koordinaten so verändern, dass $H_{rr} \neq 0$ auf U gilt. Es sei $g = \sqrt{|H_{rr}|}$.
Mit $y_i = x_i$ für $i \neq r$ und $y_r = g \cdot (x_r + \sum_{i>r} x_i \cdot \frac{H_{ir}}{H_{rr}})$ erhält man neue Koordinaten , für die gilt:

$$f(y_1, \ldots y_n) = \pm y_1^2 \cdots \pm y_r^2 + \sum_{i,j>r} H'_{ij}(y_1, \ldots, y_n) y_i, y_j$$

Wahl der neuen Koordinaten

H_{ij} ist symmetrisch und in einer Umgebung U von 0 regulär. Daher lassen sich die letzten $n - r + 1$ Koordinaten so verändern, dass $H_{rr} \neq 0$ auf U gilt. Es sei $g = \sqrt{|H_{rr}|}$.
Mit $y_i = x_i$ für $i \neq r$ und $y_r = g \cdot (x_r + \sum_{i>r} x_i \cdot \frac{H_{ir}}{H_{rr}})$ erhält man neue Koordinaten , für die gilt:

$$f(y_1, \ldots y_n) = \pm y_1^2 \cdots \pm y_r^2 + \sum_{i,j>r} H'_{ij}(y_1, \ldots, y_n) y_i, y_j$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung, auf der $y_1, \ldots y_n$ Koordinatenfunktionen sind.

Wahl der neuen Koordinaten

H_{ij} ist symmetrisch und in einer Umgebung U von 0 regulär. Daher lassen sich die letzten $n-r+1$ Koordinaten so verändern, dass $H_{rr} \neq 0$ auf U gilt. Es sei $g = \sqrt{|H_{rr}|}$.
Mit $y_i = x_i$ für $i \neq r$ und $y_r = g \cdot (x_r + \sum_{i>r} x_i \cdot \frac{H_{ir}}{H_{rr}})$ erhält man neue Koordinaten , für die gilt:

$$f(y_1, \dots y_n) = \pm y_1^2 \cdots \pm y_r^2 + \sum_{i,j>r} H'_{ij}(y_1, \dots, y_n) y_i, y_j$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung, auf der $y_1, \dots y_n$ Koordinatenfunktionen sind. Nach Umsortieren steht vor den ersten λ Koordinaten ein Minus. Dann ist λ offensichtlich der Morseindex von f.

Verwendete Literatur

J. Milnor: Morse Theory,
Annals of Mathematics Studies
Princeton University Press