# Übungen zur Vorlesung

# Dynamische Systeme

# Lösungen von Aufgabenblatt 1

**Aufgabe 1:**
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus mit einem periodischen Orbit der Periode $k$.

**a)** Welche Werte kann dann die Rotationszahl von $f$ haben?

**Lösung:**
Alle Äquivalenzklassen

$$\left[\frac{p}{k}\right], \; p \in \mathbb{Z}$$

sind möglich. Bemerkung: Genausogut kann man nur die Äquivalenzklassen mit $p \in \mathbb{N}$ betrachten, oder sogar nur $p \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, da dies schon alle sind. Andere Werte können nicht angenommen werden: Die Rotationszahl muss wegen dem periodischen Orbit rational sein, also gleich $\left[\frac{p}{q}\right]$, $p, q \in \mathbb{Z}$. O.B.d.A. ist dieser Bruch gekürzt. Damit hat jeder periodische Punkt von $f$ die Periode $lq$, $q \in \mathbb{Z}$. Somit $q = k/l$.

**b)** Kann $f^n$ für $n \neq k$ einen Fixpunkt haben?

**Lösung:**
Ja, für $n = kl$, $l \in \mathbb{Z}$ ist jeder Fixpunkt von $f^k$ natürlich auch einer für $f^n = (f^k)^l$. Für $n \notin k \cdot \mathbb{Z}$ kann $f^n$ keinen Fixpunkt haben, wegen demselben Argument wie in (a).

**Aufgabe 2:**
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus mit Rotationszahl $\alpha$ und $h : S^1 \to S^1$ ein orientierungs*umkehrender* Kreishomöomorphismus.

**a)** Geben Sie eine Formel für die Rotationszahl der Konjugation $h^{-1} \circ f \circ h$ an.

**Lösung:**
Für orientierungsumkehrendes $h$ gilt

$$\rho(h^{-1} \circ f \circ h) = -\rho(f).$$

**b)** Beweisen Sie Ihre Formel.

**Lösung:**
Sei $H$ ein Lift von $h$, d.h. $\pi \circ H = h \circ \pi$. Es gilt

$$H(x+1) = H(x) - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. (Beachten Sie das Minuszeichen.) Wir wählen $H$ so, dass $H(0) \in [0, 1)$.

H ist invertierbar, und $H^{-1}$ ist Lift von $h^{-1}$, denn es gilt für alle $x$ :

$$\pi(x) = \pi \circ H \circ H^{-1}(x) = h \circ \pi \circ H^{-1}(x)$$

und somit

$$h^{-1} \circ \pi(x) = \pi \circ H^{-1}(x).$$

Weiterhin ist $H^{-1} \circ F \circ H$ ein Lift von $h^{-1} \circ f \circ h,$ denn es gilt

$$\pi \circ H^{-1} \circ F \circ H = h^{-1} \circ \pi \circ F \circ H = h^{-1} \circ f \circ \pi \circ H = h^{-1} \circ f \circ h \circ \pi.$$

Es gilt

$$|H(x) + x| < 4$$

(beachten Sie das Pluszeichen) und $|H^{-1}(x) + x| < 4$. Nun wenden wir das Lemma an, das besagt: $|x - y| < k \in \mathbb{N}$ impliziert $|g(x) - g(y)| < k$. Für $g$ wählen wir $F^n$und $-H$:

$$|H(x) - (-x)| < 4$$

$$|F^n \circ H(x) - F^n(-x)| < 4$$

$$|(-H) \circ F^n \circ H(x) - (-H) \circ F^n(-x)| < 4$$

und somit

$$\begin{aligned}
\rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H^{-1} \circ F^n \circ H(x) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(H \circ F^n(-x) + 4) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(-F^n(-x) + 8) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} F^n(y).
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 3:**
Sei $f : X \to X$ eine Abbildung. Eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ heißt **minimal**, wenn $A$ gleich dem Abschluss vom Orbit von jedem Punkt in $A$ ist. Zeigen Sie: Wenn $A$ und $B$ abgeschlossene minimale Teilmengen von $X$ sind, dann sind $A$ und $B$ gleich oder disjunkt.

**Lösung:**
Wenn $A$ abgeschlossen und minimal ist, gilt für alle $x \in A$: $A = \overline{f^{\mathbb{Z}}(x)}.$ Haben nun $A, B$ diese Eigenschaft und ist $x \in A \cap B,$ so ist $A = \overline{f^{\mathbb{Z}}(x)} = B.$ Also ist $A \cap B = \emptyset$ oder $A = B.$ □

**Aufgabe 4:**
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus mit Rotationszahl $p/q$. Zeigen Sie:

**a)** Für jedes $x \in S^1$ gibt es $x_+, x_- \in S^1$, so dass das Orbit von $x$ unter $f^q$ gegen $x_+$ konvergiert und das Orbit von $x$ unter $f^{-q}$ gegen $x_-$ konvergiert.

**Lösung:**
Jedes periodische Orbit von $f$ hat Periode $q$ und ist somit Fixpunkt von $f^q$ und Nullpunkt von $F^q - id - p$. Wenn $(F^q - id - p)(x) = 0$ ist, gilt die Aussage mit $x_+ = x = x_-$. Wenn $(F^q - id - p)(x) > 0$ ist, definiere $x_+$ als die nächste Nullstelle rechts von $x$ und definiere $x_-$als die nächste Nullstelle links von $x$. Dann ist das Orbit von $x$ im Intervall $(x_-, x_+)$ monoton nach rechts wachsend und beschränkt, also konvergent. Der Limes ist Fixpunkt wegen Stetigkeit, also $x_+$. Analog gilt $\lim_{n\to-\infty} f^n(x) = x_-$.

Für $(F^q - id - p)(x) < 0$ gilt dasselbe Argument, wobei $x_+$ die nächste Nullstelle links und $x_-$ die nächste Nullstelle rechts von $x$ sind.

**b)** Wenn $f$ mindestens zwei disjunkte periodische Orbits hat, dann liegen $x_+$und $x_-$ auf disjunkten periodischen Orbits von $f$.

**Lösung:**
Hier muss noch gefordert werden, dass $x$ nicht auf einem periodischen Orbit liegt. Mit dieser Forderung hat das Intervall $(x_-, x_+)$ nichtverschwindende Länge. Wenn $x_-, x_+$ auf demselben periodischen Orbit liegen, gibt es nach Konstruktion in Teil (a) keinen periodischen Punkt in $(x_-, x_+)$. Ein zweites periodisches Orbit würde das Orbit von $x_-$, $f(x_-) = x_+$ also überholen. Dann würde für den Lift $F$ gelten: $F^q(x_-) = x_- + p$, $F^q(y) = y + p$ (wobei $y$ das zweite Orbit ist), aber $y < x_-$ und $F^q(y) > F^q(x_-)$. Widerspruch.